



# Connexions plates logarithmiques de rang deux sur le plan projectif complexe

Gaël Cousin

## ► To cite this version:

Gaël Cousin. Connexions plates logarithmiques de rang deux sur le plan projectif complexe. Variables complexes [math.CV]. Université Rennes 1, 2012. Français. NNT : RENN1 9905338 /2012201104434 . tel-00779098

**HAL Id: tel-00779098**

**<https://theses.hal.science/tel-00779098>**

Submitted on 21 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et applications*

**Ecole doctorale Matisse**

présentée par

**Gaël Cousin**

préparée à l'IRMAR - UMR CNRS 6625  
Institut de Recherche Mathématique de Rennes  
Université de Rennes 1

**Connexions plates  
logarithmiques  
de rang deux sur le  
plan projectif complexe**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 4 octobre 2012**

devant le jury composé de :

**Charles FAVRE**

Directeur de Recherche, CNRS / rapporteur

**Adolfo GUILLOT**

Professeur, UNAM Cuernavaca / rapporteur

**Bertrand DEROIN**

Chargé de Recherche, CNRS / examinateur

**Carlos SIMPSON**

Directeur de Recherche, CNRS / examinateur

**Frédéric TOUZET**

Maître de Conférence, Université Rennes 1 /  
examinateur

**Frank LORAY**

Directeur de Recherche, CNRS / directeur de thèse

*Gaël Cousin*

Thèse financée par le C.N.R.S.

**CONNEXIONS PLATES LOGARITHMIQUES  
DE RANG DEUX SUR LE PLAN PROJECTIF  
COMPLEXE**

**Gaël Cousin**



## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je souhaite remercier mon directeur Frank Loray qui a su me faire faire des mathématiques. Il a joué son rôle de maître avec une grande dextérité. À l'aide de dessins, il m'a donné une forme d'intuition pour certains objets de la géométrie complexe et de la théorie des feuilletages holomorphes. Cette empreinte demeurera un point de repère dans mes activités futures.

Je remercie Charles Favre et Adolfo Guillot pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse, pour leurs pertinentes remarques et suggestions et pour être venus jusqu'à Rennes participer à mon jury.

Merci à Bertrand Deroin, Carlos Simpson et Frédéric Touzet d'être membres de mon jury et pour leurs lumières mathématiques à différentes occasions.

C'est un honneur de soutenir cette thèse devant un jury aussi prestigieux.

Que soit aussi remercié Jorge Pereira pour ses indications qui ont joué un rôle clef dans ce qui est devenu le quatrième chapitre de cette thèse.

Au sein de l'IRMAR et de l'équipe de géométrie analytique, j'ai bénéficié d'un accueil d'une qualité remarquable. J'ai eu le plaisir d'échanger sur des thèmes variés avec tous les membres de cette équipe, plus particulièrement auprès du groupe des feuilleteurs : Frank, Frédéric, Guy, Jean-Marie, Karamoko et le bienveillant patriarche Dominique Cerveau. J'ai eu aussi la chance de pouvoir discuter avec Bachir Bekka, Michele Bolognesi, David Bourqui, Serge Cantat, Jean-Pierre Escofier, Jeroen Sijtsling, Ludovic Marquis et Christophe Mourougane.

Les échanges avec les autres doctorants ont été nombreux et stimulants, à ce titre je remercie notamment Damian, Matthieu, Arnaud, Jérémy, Colas, Yoann, Baptiste, Basile, Jean-Louis, Damien, François, Viet, Élise, Kodjo, Charles et Romain.

Je suis également très reconnaissant à tous mes anciens professeurs au sein de L'U.F.R. ; je salue également les collègues avec lesquels j'ai partagé des charges d'enseignements.

Merci aux personnels d'entretien, gestionnaires, secrétaires, bibliothécaires et informaticiens qui, par leur efficacité et leur gentillesse, contribuent grandement à la qualité du cadre de travail qu'on trouve à l'IRMAR.

Enfin, je remercie Céline, ma famille et mes amis pour leur soutien dans cet engagement de trois ans.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b> .....	1
Contenu des chapitres .....	3
<b>1. Connexions plates, feuilletages de Riccati</b> .....	9
1.1. Préliminaires .....	9
1.1.1. Connexions .....	9
1.1.2. Feuilletages de Riccati .....	12
1.1.3. Monodromie .....	14
1.2. Groupe fondamental .....	16
1.2.1. Propriétés générales .....	16
1.2.2. Algorithme .....	17
1.3. Correspondance de Riemann-Hilbert .....	18
1.4. Fibrés en $\mathbb{P}^1$ , fibrés de rang deux sur $\mathbb{P}^2$ .....	21
1.5. Formule de Camacho-Sad .....	25
1.6. Relèvement des feuilletages de Riccati en des connexions .....	26
1.7. Riemann-Hilbert, extensions .....	28
1.8. Cas abélien .....	31
1.9. Cas réductible .....	32
1.10. Feuilletages de Riccati pull-back par une application vers une courbe .....	33
<b>2. Équation de Painlevé VI</b> .....	41
2.1. Formules donnant la déformation issue d'une solution .....	42
2.2. Solutions algébriques .....	44
2.3. Matrices de monodromie .....	50
2.4. Action de Galois sur les solutions algébriques de Painlevé VI ....	50
2.5. Solutions pull-back .....	52
2.6. Corps de traces du groupe de monodromie .....	56



<b>3. Feuilletages transversalement projectifs</b>	61
3.1. Feuilletages, structures transversalement projectives	61
3.2. Projection des conjugaisons	62
3.3. Compactification de la structure transverse des feuilletages modulaires	64
3.3.1. Compactification aux points singuliers	65
3.3.2. Au voisinage des cusps	69
<b>4. Un exemple de feuilletage modulaire</b>	75
4.1. Introduction	75
4.2. Préliminaires	77
4.2.1. Surfaces modulaires, feuilletages modulaires	77
4.2.2. Feuilletages transversalement projectifs, feuilletages de Riccati	78
4.2.3. Équation de Painlevé VI et déformations isomonodromiques	80
4.3. Solution de l'équation de Painlevé VI, une famille non pull-back	81
4.4. Construction de notre exemple	84
4.5. Dimensions de Kodaira	86
4.5.1. Désingularisation	87
4.5.2. Étude des courbes rationnelles invariantes	92
4.5.3. Décomposition de Zariski, dimension de Kodaira numérique	94
4.5.4. Dimension de Kodaira	95
4.6. Feuilletage dual	97
4.7. L'involution	97
4.8. Calcul de la monodromie des structures transverses	98
4.8.1. Groupe fondamental	98
4.8.2. Monodromie	101
4.9. La surface modulaire associée à $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$	104
4.10. Conclusion	106
<b>5. Autres exemples</b>	109
5.1. Question de factorisation pour les courbes de petit degré	109
5.2. Une quintique irréductible à représentations irréductibles	110
5.3. Représentations pour les sextiques de Zariski	112
<b>Bibliographie</b>	117

## INTRODUCTION

Dans ce manuscrit, il est question de connexions plates méromorphes de rang 2, de feuilletages de Riccati et de feuilletages transversalement projectifs. Tout cela se déroule principalement sur  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , toutefois on a donné des énoncés un peu généraux quand on le pouvait.

Si  $X$  est une variété complexe lisse, une connexion plate méromorphe  $\nabla$  au dessus de  $X$  correspond à un feuilletage holomorphe singulier de codimension 2 sur un fibré vectoriel de rang 2 sur  $X$ , transverse à sa fibre générique et compatible à sa structure linéaire. Le lieu où la transversalité fait défaut est le lieu polaire  $D$  de la connexion, une hypersurface analytique de  $X$ .

En relevant les lacets de  $X \setminus D$  dans les feuilles, on obtient un morphisme de groupes :  $\pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ , appelé représentation de monodromie de  $\nabla$ .

En imposant une contrainte sur le feuilletage au voisinage des pôles -la logarithmicité de  $\nabla$ - et sur les singularités de  $D$  -à croisements normaux- Deligne a établi une correspondance entre les représentations  $\pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  et les connexions plates de rang 2 : la correspondance de Riemann-Hilbert.

Un feuilletage de Riccati est donné par une connexion projective plate sur un fibré en  $\mathbb{P}^1$  au dessus de  $X$ , c'est un feuilletage holomorphe singulier sur l'espace total du fibré, transverse à sa fibre générique. Les connexions projectives sont -du moins localement- des projectivisés de connexions. Comme précédemment, on peut définir le lieu polaire d'un feuilletage de Riccati et sa représentation de monodromie :  $\pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ .

On voit que les propriétés d'une connexion plate et celles du feuilletage de Riccati qu'on en déduit par projectivisation sont fortement reliées, en particulier si  $\rho : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  est la représentation de monodromie

d'une connexion plate  $\nabla$  et si  $\mathcal{R} = \mathbb{P}(\nabla)$  est le projectivisé de  $\nabla$ , alors la représentation de monodromie de  $\mathcal{R}$  est  $\mathbb{P}(\rho)$ , la composée de  $\rho$  avec  $\mathrm{GL}_2 \rightarrow \mathrm{PGL}_2$ .

Dans le cadre des surfaces projectives, en utilisant les travaux de Deligne [Del70], Loray et Pereira [LP07] ont obtenu une correspondance de Riemann-Hilbert pour les feuilletages de Riccati, sans contrainte de croisements normaux pour le lieu polaire. Une des questions qui se présentent au sujet de cette correspondance est de connaître le type de  $\mathbb{P}^1$ -fibré qui peut apparaître suivant les propriétés de la représentation.

Si  $X$  est une variété projective et  $D$  est une hypersurface de  $X$ , un certain nombre de propriétés sont connues pour les représentations  $\pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  *quasi-unipotentes à l'infini*. On dit que  $\pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est quasi-unipotente à l'infini si, pour toute suite d'éclatements  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ , telle que  $\tilde{D} = \phi^*(D)$  est à croisement normaux dans  $\tilde{X}$ , alors les valeurs propres de  $\rho(\gamma)$  sont des racines de l'unité, pour tout  $\gamma \in \pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{D})$  faisant le tour d'une composante de  $\tilde{D}$ . Notamment, un article de Corlette et Simpson [CS08] montre que pour une représentation Zariski dense  $\rho : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , si  $\mathbb{P}(\rho)$  ne se factorise par une application  $f : (X, D) \rightarrow (\mathcal{C}, d)$  avec  $\mathcal{C}$  une courbe projective lisse et  $d$  un ensemble de points sur  $\mathcal{C}$ , alors  $\rho$  est rigide et définie sur un anneau d'entiers algébriques. De plus, dans cette situation, ils montrent que cette représentation se factorise par un "espace" muni d'une représentation bien particulière : un "polydisk Shimura DM-stack" muni de sa représentation tautologique.

Ces résultats ont donné une inspiration à nos travaux. Effectivement, une partie de notre travail relève de la démarche suivante. D'abord se donner une représentation, soit après calcul explicite d'un groupe fondamental, soit en se donnant un feuilletage de Riccati ou une connexion plate, puis discuter si la représentation se factorise par une courbe et, si cela ne se produit pas, s'intéresser plus intensément à l'exemple que l'on a en main, pour comprendre le "polydisk Shimura DM-stack" qui lui est associé. Si on travaille avec un feuilletage (de Riccati ou associé à une connexion plate) plutôt que sa représentation de monodromie, l'analogue de la factorisation par une courbe est que le feuilletage soit, à isomorphisme birationnel de fibrés près, tiré en arrière (*pull-back*) d'un feuilletage du même type sur un fibré au dessus d'une courbe.

Un feuilletage transversalement projectif  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est un feuilletage de codimension 1 qui se déduit d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi : P \rightarrow X$

en choisissant une section méromorphe  $\sigma$  de  $\pi$  et en posant  $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{R}$ , "on regarde une tranche de  $\mathcal{R}$ ". Parmi les feuilletages transversalement projectifs, on s'est particulièrement intéressé aux *feuilletages modulaires*.

Dans cette thèse, après quelques préliminaires, nous discutons différents moyen de se donner une représentation ou un feuilletage, nous discutons cette propriété de pull-back, puis certaines propriétés des feuilletages transversalement projectifs, notamment des feuilletages modulaires, pour aboutir à notre contribution principale : l'exhibition d'un feuilletage modulaire et de sa structure transverse à l'aide d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI.

## Contenu des chapitres

### Chapitre 1 : Connexions plates, feuilletages de Riccati

Dans ce chapitre, on définit les deux concepts de base de cette thèse que sont ceux de connexion plate et de feuilletage de Riccati. On définit les notions de représentations de monodromie qui s'y rattachent, puis on donne la correspondance de Riemann-Hilbert pour un lieu polaire à croisement normaux, c'est un lien fort entre les représentations et les feuilletages.

Ensuite on discute quelques propriétés des fibrés en  $\mathbb{P}^1$  et des fibrés vectoriels de rang 2 sur  $\mathbb{P}^2$  en relation avec leurs analogues sur  $\mathbb{P}^1$ .

Les fibrés en  $\mathbb{P}^1$  sur  $\mathbb{P}^n$  sont en fait tous des projectivisés de fibrés de rang 2. Pour un fibré de rang 2, on s'intéressera à la propriété d'être somme directe de deux fibrés en droites, elle est toujours vérifiée au dessus de  $\mathbb{P}^1$ . Au dessus de  $\mathbb{P}^2$  ce n'est pas nécessairement le cas, il y a des exemples de fibrés dont les restrictions à différentes droites de  $\mathbb{P}^2$  ne sont pas isomorphes. On en tire une notion de droite de saut. On donne un exemple de fibré à droites de sauts isolés.

Comme les  $\mathbb{P}^1$ -fibrés au dessus de  $\mathbb{P}^2$  se relèvent en des fibrés de rang deux, on peut espérer relever les feuilletages de Riccati en des connexions. On voit que c'est effectivement possible. Ensuite on discute la question du relèvement en une connexion à trace nulle.

On discute ensuite les raffinements possibles de la correspondance de Riemann-Hilbert sur les surfaces.

Fort de ces raffinements, on voit que l'étude des feuilletages de Riccati se réduit à comprendre les représentations de groupes fondamentaux. Pour cette raison, on donne des informations sur le groupe fondamental du complémentaire

d'une courbe dans  $\mathbb{P}^2$ , notamment un moyen d'en obtenir une présentation : l'algorithme de Zariski-Van Kampen.

Ensuite, on donne un moyen algorithmique de dire si un feuilletage de Riccati au dessus de  $\mathbb{P}^1$  ou  $\mathbb{P}^2$  est à monodromie réductible.

Enfin, on donne des conditions suffisantes pour qu'un feuilletage de Riccati soit pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe. On obtient notamment le théorème suivant.

**Théorème.** — *Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques au dessus de  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathcal{C}$  son lieu polaire. Si la monodromie de  $\mathcal{R}$  est Zariski dense et si  $\mathcal{C}$  a un point de multiplicité  $m \geq \deg(\mathcal{C}) - 2$  alors  $\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.*

On en tire ce qui suit.

**Corollaire.** — *Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques au dessus de  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathcal{C}$  son lieu polaire. Si  $\deg(\mathcal{C}) \leq 4$ , alors  $\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe ou sa monodromie n'est pas Zariski dense.*

## Chapitre 2 : Équation de Painlevé VI

L'équation de Painlevé VI (PVI) est une équation différentielle de la forme  $d^2q/d^2t = F(t, q, dq/dt, \theta)$ , où  $F$  est une fraction rationnelle et  $\theta$  est un quadruplet de paramètres. L'équation de paramètre  $\theta$  est notée  $(PVI)_\theta$ . Une solution algébrique de l'équation  $(PVI)_\theta$  est un couple  $(q(s), t(s))$  de fonctions méromorphes sur une courbe projective lisse qui satisfait cette équation, au seul sens raisonnable (en particulier  $dt/ds \neq 0$ ), par abus de langage on dit que c'est une solution algébrique de (PVI).

Si  $\mathcal{R}$  est un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques au dessus de  $\mathbb{P}^2$ , de lieu polaire  $\mathcal{C}$  qui possède un point  $O$  de multiplicité exactement  $\deg(\mathcal{C}) - 3$ , alors on peut considérer la famille  $(\mathcal{R}_s)_{s \in \mathbb{P}^1}$  des restrictions de  $\mathcal{R}$  aux éléments de  $(\delta_s)_{s \in \mathbb{P}^1}$ , le pinceau des droites issue  $O$ . Pour  $s$  générique,  $\mathcal{R}_s$  est un feuilletage de Riccati à quatre pôles logarithmiques. Au voisinage d'un  $s = s_0$  générique on a donc une *déformation isomonodromique*  $(\mathcal{R}_s)$  de feuilletage de Riccati à quatre pôles logarithmiques, à laquelle on peut associer une solution de l'équation de Painlevé VI par la théorie des déformations isomonodromiques. Cette solution locale se prolonge en une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI, puisque l'on est parti d'un feuilletage algébrique sur  $\mathbb{P}^2$ . La procédure ci-dessous permet de reconstruire  $\mathcal{R}_s$  à partir de cette solution, à équivalence birationnelle près.

Réciproquement, connaissant une solution algébrique  $(q(s), t(s))$  de  $(\text{PVI})_\theta$ , par des formules rationnelles en  $q, t, \theta$  et  $dq/dt$  données dans ce chapitre, on déduit d'une telle solution une connexion plate  $\nabla$  méromorphe sur le fibré de rang 2 trivial sur  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ . Les connexions ainsi construites ont un lieu polaire qui est donné par quatre sections et des fibres de  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ . La famille  $(\nabla_s)$  des restrictions de  $\nabla$  aux fibres de  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$  est une déformation isomonodromique algébrique de connexion à quatre pôles sur  $\mathbb{P}^1$ . Par projectivisation, on en déduit une famille de feuilletages de Riccati  $(\mathcal{R}_s) = (\mathbb{P}(\nabla_s))$ .

Toutes les solutions algébriques de l'équation de Painlevé VI sont connues, voir [Boa10] et [LT08]. À chaque solution on peut associer la monodromie  $\rho$  de  $\nabla_s$ , pour un  $s$  générique. On a une action naturelle du mapping class group de la sphère épointée quatre fois  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$  sur les classes de conjugaison  $[\rho]$  de telles représentations. Les solutions algébriques de l'équation de Painlevé VI sont caractérisées par l'orbite finie  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)[\rho]$  qu'on leur associe ainsi.

Dans le cas où la monodromie de  $\nabla_s$  est irréductible et quasi-unipotente à l'infini, on a une action naturelle du groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$  sur ces orbites, donc aussi sur les solutions de (PVI) correspondantes. On calcule les orbites de cette action et montre l'utilité de ce calcul pour les questions de factorisation mentionnées ci-dessus. On dit aussi, à l'aide de ce résultat, lesquelles des solutions de (PVI) donnent un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$  qui est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe. Pour les autres solutions, une question naturelle est de connaître la dimension minimale du "polydisk Shimura D-M stack" par lequel la monodromie doit se factoriser d'après Corlette et Simpson. On montre que cette dimension est nécessairement 2 pour certaines de ces solutions. L'argument utilisé peut donner une majoration de cette dimension pour plusieurs autres solutions.

### Chapitre 3 : Feuilletages transversalement projectifs

Comme mentionné ci-dessus, un feuilletage transversalement projectif sur  $X$  est un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 sur  $X$  tel qu'il existe un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi : P \rightarrow X$  muni d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  et d'une section méromorphe  $\sigma$  tels que  $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{R}$ .

Le triplet  $(\pi, \mathcal{R}, \sigma)$  est appelé structure transversalement projective pour  $\mathcal{F}$ . Dans ce chapitre, on montre d'abord que la relation de conjugaison pour les structures transversalement projectives est respectée par certaines opérations naturelles. Ensuite, on fait une investigation assez complète de la structure transverse des feuilletages modulaires de Hilbert, avec des descriptions locales explicites. Ce chapitre peut être considéré comme une annexe du chapitre

suivant, présenté sous forme d'article indépendant. Il contient toutefois des résultats non mentionnés dans ce dernier, principalement le suivant qui porte sur la structure transverse minimale (voir [LP07, p 725]) des feuilletages modulaires.

**Théorème.** — *La structure transverse minimale  $(P, \mathcal{R}, \sigma)$  de tout feuilletage modulaire de Hilbert  $\mathcal{F}$  est donnée par un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques dont les exposants  $\theta$  sont des rationnels contenus dans  $] -1, 1[$ .*

*La section  $\sigma$  est holomorphe et elle rencontre les singularités de  $\mathcal{R}$  exactement au dessus des singularités de  $\mathcal{F}$  qui ne sont pas à l'intersection de deux de ses courbes rationnelles invariantes.*

#### Chapitre 4 : Un exemple de feuilletage modulaire

Les feuilletages modulaires sont des feuilletages naturels sur les quotients du bidisque par des sous-groupes discrets irréductibles  $\Gamma$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Ils sont induits par les feuilletages horizontaux et verticaux du bidisque et sont naturellement munis de structures transversalement projectives. On peut se donner un tel  $\Gamma$  par le choix d'un nombre réel quadratique, voir section 2.1. Dans la classification de Brunella, Mc Quillan et Mendes (voir [Bru00] et [Bru03b]), parmi les feuilletages sur les surfaces projectives, les feuilletages modulaires sont caractérisés par leurs dimensions de Kodaira :  $\mathbf{kod} = -\infty$  et  $\nu = 1$  ; ce sont deux invariants numériques codant les propriétés de tangence du feuilletage. Dans [MP05], Mendes et Pereira donnent les premiers exemples de modèles birationnels explicites pour des feuilletages modulaires. La découverte de ces feuilletages est fondée sur une bonne connaissance de la surface sous-jacente. Il apparaît que les structures transversalement projectives de deux de ces exemples (les feuilletages  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_3$  associés à  $\sqrt{5}$  dans [MP05]) correspondent à des déformations isomonodromiques de feuilletages de Riccati à quatre pôles sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , c'est à dire à deux solutions de l'équation de Painlevé VI (PVI). Ces solutions sont, par construction, algébriques ; elles sont des transformées d'Okamoto de solutions icosahédrales de Dubrovin-Mazzocco [DM00], les solutions n°31 et 32 de la liste de Boalch [Boa06].

L'objectif principal de ce chapitre est de produire un exemple de feuilletage modulaire en inversant cette construction. Partant d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI bien choisie, on suit la démarche suivante :

- on montre que le feuilletage de Riccati associé  $\mathcal{R}$  n'est pas pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe,
- on utilise les formules mentionnées ci-haut pour avoir une équation de  $\mathcal{R}$  sur le fibré trivial au dessus de  $\mathbb{P}^2$ ,

- on trouve un groupe de symétries de  $\mathcal{R}$  et une équation du feuilletage de Riccati quotient  $\tilde{\mathcal{R}}$ ,
- on choisit une section  $\sigma$  du fibré associé à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et définit un feuilletage transversalement projectif  $\mathcal{F} = \sigma^*\tilde{\mathcal{R}}$ ,
- on calcule la représentation de monodromie de  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- grâce à cela et au calcul de la dimension de Kodaira de  $\mathcal{F}$ , par la théorie des feuilletages sur les surfaces, on peut conclure que  $\mathcal{F}$  est un feuilletage modulaire,
- on obtient le feuilletage dual  $\mathcal{G}$ ,
- grâce au calcul de monodromie, on obtient qu'après un revêtement double de  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , on obtient les feuilletages associés à  $\sqrt{3}$ , conduisant au résultat suivant.



**Théorème.** — *Un modèle birationnel de la surface modulaire bifeuilletée  $(Y_{\sqrt{3}}, \mathcal{F}_{\sqrt{3}}, \mathcal{G}_{\sqrt{3}})$  est  $(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}_{\omega_1}, \mathcal{G}_{\tau_1})$  où*  

$$\omega_1 = 6(3v^2 + 1)v(v^2 + 9uv^2 + 3u)du$$

$$+ ((9u - 5)(9u - 2)(9u - 1)v^4 + 9u(5 + 54u^2 - 30u)v^2 + 9u^2(9u - 2))dv.$$

$$\tau_1 = 6(3v^2 + 1)v(-8v^2 - 3 + 36uv^2 + 12u)du$$

$$+ ((9u - 5)(9u + 1)(9u - 1)v^4 + (3 + 486u^3 - 432u^2 + 45u)v^2 + 9u(9u - 2)(u - 1))dv.$$
*De plus,  $\sigma_1 : (u, v) \mapsto \left( \frac{3v^2(36v^2+13)u-v^2(20v^2+9)}{9(12v^2-1)(3v^2+1)u-3v^2(36v^2+13)}, v \right)$  est une involution birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  qui échange  $\mathcal{F}_{\omega_1}$  et  $\mathcal{G}_{\tau_1}$ .*

On remarque que l'on obtient ainsi une factorisation du type décrit par Corlette et Simpson : les surfaces modulaires sont les exemples les plus simples de "polydisk Shimura DM-stack" de dimension  $> 1$ .

## Chapitre 5 : Autres exemples

On applique notre théorème de pull-back du chapitre 1 aux courbes de degré  $\leq 5$  qui en satisfont les hypothèses. Pour les quintiques  $\mathcal{C}$  qui ne satisfont pas ces hypothèses, on donne une piste pour trancher la question de factorisation par une courbe des  $\mathrm{SL}_2$ -représentations Zariski denses de  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C})$ .

Nous avons par ailleurs étudié les représentations irréductibles des quintiques irréductibles. D'après, Degtyarev [Deg89], à isotopie rigide près, il n'y a que deux quintiques irréductibles à groupe fondamental non abélien. Une seule d'entre elles donne un groupe fondamental qui ait des représentations irréductibles, ce sont trois représentations conjuguées par le groupe de Galois de  $\bar{\mathbb{Q}}$ , au sens décrit au chapitre 2. Les feuilletages de Riccati correspondant peuvent être obtenus par pull-back de feuilletages de Riccati au dessus de  $\mathbb{P}^1$  et sont revêtus par ceux correspondants à trois solutions de l'équation de Painlevé VI. Nous explicitons cela. Cela donne un exemple de représentation rigide qui est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.

On étudie aussi les représentations non abéliennes des sextiques de Zariski, donne les feuilletages de Riccati correspondant à celles qui sont réductibles et calcule les  $\mathbb{P}^1$ -fibrés sous-jacent.

## CHAPITRE 1

### CONNEXIONS PLATES, FEUILLETAGES DE RICCATI

#### 1.1. Préliminaires

**1.1.1. Connexions.** — Dans ce document, on ne considérera que des fibrés vectoriels holomorphes et de rang 2. Sur une variété lisse  $M$  on note  $\mathcal{O}_M$  le faisceau des fonctions holomorphes,  $\mathcal{M}_M$  celui des fonctions méromorphes,  $\Omega_M^1$  celui des 1-formes holomorphes et  $\mathcal{M}_M^1$  celui des 1-formes méromorphes.

**Définition 1.1.1.** — Soit  $M$  une variété complexe lisse. Soit  $V$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $M$ , et  $\mathbf{V}$  le faisceau de ses sections. Une *connexion méromorphe* sur  $V$  est un morphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\nabla : \mathbf{V} \rightarrow (\mathcal{M}_M^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{V}) =: \mathbf{V}^1$$

qui vérifie l'identité de Leibniz suivante : pour toute section locale  $(f, s)$  de  $\mathcal{O} \times \mathbf{V}$ ,  $\nabla(f.s) = df.s + f.\nabla s$ .

Si un atlas de trivialisation du fibré  $V$  est donné par les ouverts  $(U_i)$  et les isomorphismes  $\varphi_i : V|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^2$  alors, pour tout  $x \in U_i \cap U_j$ ,  $(\varphi_i \cdot \varphi_j^{-1})|_x$  induit un automorphisme de  $\mathbb{C}^2$  qu'on notera  $g_{ji}(x)$  et dont la matrice dans la base canonique sera appelée  $A_{ji}(x)$ .

Dans chacune de ces trivialisations on va obtenir une forme particulièrement simple de la connexion. Soit  $U := U_i$ . D'une part, sur un fibré trivial  $W = U \times \mathbb{C}^2$  on peut définir une connexion  $\nabla'$  comme suit : si  $s : U \rightarrow \mathbb{C}^2$  est une section,  $\nabla' s := ds$ . D'autre part, pour toute connexion  $\nabla'$  définie sur  $W$  on voit que

$$(\nabla - \nabla') : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}^1$$

est un morphisme  $\mathcal{O}$  linéaire qui peut être donné par une matrice  $-\Omega$  de 1-formes définies sur  $U$ , dont les colonnes sont les images des sections constantes  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ .

Ainsi, l'étude des *sections horizontales* pour une connexion  $\nabla$  sur un fibré vectoriel  $V$ , i.e. la recherche des sections locales  $s$  de  $\mathbf{V}$  telles que  $\nabla \cdot s = 0$  revient à la résolution de systèmes différentiels linéaires

$$ds = \Omega \cdot s.$$

**Remarque 1.1.2.** — De plus toute connexion peut être donnée par un atlas de trivialisations  $(U_i \times \mathbb{C}^2)$  avec des matrices de transitions  $(A_{ji})$  et de tels systèmes  $ds = \Omega_i \cdot s$  qui respectent la condition suivante, pour tout  $x$  dans  $U_i \cap U_j$  :

$$\Omega_i(x) = (dA_{ji}(x) + A_{ji}(x)\Omega_j(x))A_{ij}(x).$$

C'est cette dernière description des connexions qui sera majoritairement utilisée dans notre thèse.

**Définition 1.1.3.** — Dans la description précédente, les pôles des  $\Omega_i$  définissent un diviseur de  $M$ . Ce dernier est appelé *diviseur polaire* de  $\nabla$ . Son support est appelé *lieu polaire* de  $\nabla$ . Si ce lieu polaire est vide, on dit que  $\nabla$  est une *connexion holomorphe*.

**Définition 1.1.4.** — Soit  $M$  une variété complexe lisse. Soient  $(V, \nabla)$  et  $(W, \nabla')$  deux fibrés vectoriels de rang 2 sur  $M$  munis de connexions. On dit que  $\nabla$  et  $\nabla'$  sont *jauge équivalentes*, si il existe un isomorphisme de fibré  $F$  au dessus de l'identité entre  $V$  et  $W$  qui satisfait, pour toute section locale  $s$  de  $V$ ,  $\nabla' F(s) = F \nabla(s)$ . Pour deux trivialisations locales  $\phi|_U : V|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{C}^2$  et  $\psi|_U : W|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{C}^2$  dans lesquelles  $\nabla$  et  $\nabla'$  sont données respectivement par  $\Omega_U$  et  $\Omega'_U$ , si  $\psi|_U F \phi|_U^{-1} = H$ , cela signifie  $\Omega' = H \Omega H^{-1} + dH \cdot H^{-1}$ .

**Définition 1.1.5.** — Soit  $\nabla$  une connexion méromorphe sur un fibré vectoriel sur  $M$ . Soit  $x$  un point de  $M$  et  $ds = \Omega \cdot s$  une description locale de  $\nabla$  sur  $U$  un voisinage de  $x$ . Soit  $f = 0$  une équation du lieu polaire de  $\nabla$  sur  $U$ , avec  $f$  sans facteur carré. On dit que  $\nabla$  est à *pôles logarithmiques au voisinage de  $x$*  si  $f\Omega$  et  $fd\Omega$  se prolongent holomorphiquement sur  $U$ .

**Définition 1.1.6.** — Soit  $\nabla$  une connexion méromorphe sur un fibré vectoriel sur  $M$ , on dit que  $\nabla$  est à *pôles logarithmiques* si, pour tout  $x \in M$ ,  $\nabla$  est à pôles logarithmiques au voisinage de  $x$ .

**Remarque 1.1.7.** — On note qu'il suffit de vérifier cette propriété au voisinage des points lisses de  $f = 0$ .

**Définition 1.1.8.** — Une connexion holomorphe  $\nabla$  sur un fibré vectoriel de rang 2 sur  $M$  est dite *plate* si pour tout point  $x$  de  $M$ , l'espace des germes de sections horizontales en  $x$  est un espace vectoriel de dimension 2.

**Remarque 1.1.9.** — Cette définition indique qu'une connexion holomorphe plate décrit un feuilletage transverse aux fibres qui donne localement des trivialisations du fibré vectoriel.

**Proposition 1.1.10.** — Une connexion holomorphe décrite comme indiqué en 1.1.2 est plate si et seulement si, pour tout  $i$ ,  $\Omega_i \wedge \Omega_i = d\Omega_i$ .

*Démonstration.* — Si la connexion  $\nabla$  est plate, au voisinage de tout  $x_0$  de  $M$ , il existe une matrice fondamentale de solutions pour tout système  $ds = \Omega_i.s$  décrivant  $\nabla$ , c'est-à-dire il existe une matrice  $X(x)$  inversible définie au voisinage de  $x_0$  telle que  $dX = \Omega_i.X$ . On a ainsi  $\Omega_i = dX.X^{-1}$  et en utilisant la formule  $d(X^{-1}) = -X^{-1}.dX.X^{-1}$ , on voit  $d\Omega_i = -dX \wedge d(X^{-1}) = dX \wedge (X^{-1}.dX.X^{-1}) = dX.X^{-1} \wedge dX.X^{-1} = \Omega_i \wedge \Omega_i$ . La réciproque se montre en utilisant le théorème d'intégrabilité de Frobenius.  $\square$

**Définition 1.1.11.** — Une connexion méromorphe est plate si elle définit une connexion holomorphe plate sur le complémentaire de son lieu polaire.

**Définition 1.1.12.** — Une connexion de rang 2 est appelée  $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ -connexion si, dans un bon système de trivialisations locales, elle est donnée par des systèmes  $dY = \Omega_i Y$  avec les matrices  $\Omega_i$  de traces nulles et des transitions de fibré à valeurs dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .

Soient

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \frac{dx_1}{x_1}, B_n = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & x_1^n \\ 0 & -\frac{n}{2} \end{bmatrix} \frac{dx_1}{x_1}, n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{C}.$$

**Théorème 1.1.13.** — Soit  $x_1 = 0$  un diviseur lisse sur  $(\mathbb{C}^n, 0)$ . Soit  $\nabla : s \mapsto ds - \Omega s$  une  $\mathrm{sl}_2$ -connexion logarithmique plate sur le fibré trivial  $(\mathbb{C}^n, 0) \times \mathbb{C}^2$ , de lieu polaire  $x_1 = 0$ . La connexion  $\nabla$  est jauge équivalente à une connexion donnée par

$$\Omega' = A_\theta \text{ ou } \Omega' = B_n.$$

*Démonstration.* — Voir [NY02].  $\square$

Voyons quelles sont les symétries de ces modèles.

**Lemme 1.1.14.** — Soit  $\Omega = A_\theta$ . Si  $H(x) \in \mathrm{GL}_2$  est holomorphe sur  $\{x_1 \neq 0\}$  et satisfait  $\Omega = H\Omega H^{-1} + dHH^{-1}$ , alors si  $\theta \notin \mathbb{Z}$ ,  $H$  se prolonge holomorphiquement à  $\{x_1 = 0\}$ ; sinon  $H$  s'y prolonge méromorphiquement. Si  $\Omega = B_n$ , alors  $H$  se prolonge de façon holomorphe à  $\{x_1 = 0\}$ .

*Démonstration.* —  $H$  est solution univaluée d'une équation différentielle qu'on peut résoudre. Dans le premier cas on trouve  $H = \begin{bmatrix} \alpha & c_1 x_1^\theta \\ c_2 x_1^{-\theta} & \delta \end{bmatrix}$  avec  $\alpha, \delta, c_1$  et  $c_2$  des constantes. Si  $\theta \notin \mathbb{Z}$  on doit avoir  $c_1 = c_2 = 0$ . Dire  $H(x) \in \mathrm{GL}_2$  revient à  $\alpha\delta - c_1 c_2 \neq 0$ , comme  $\alpha\delta - c_1 c_2$  est constant, cela permet de conclure pour ce cas. Dans le second cas, on trouve  $H = \begin{bmatrix} \alpha & c_1 x_1^n \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$  avec  $\alpha, \delta, c_1$  des constantes.  $\square$

### 1.1.2. Feuilletages de Riccati. —

**Définition 1.1.15.** — Soit  $X$  une variété lisse. Soit  $\pi : P \rightarrow X$  un fibré localement trivial au dessus de  $X$ , de fibre  $\mathbb{P}^1$  ( $\mathbb{P}^1$ -fibré). Un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur  $\pi$  est un feuilletage holomorphe singulier de codimension 1 sur  $P$ , transverse à la fibre générique de  $\pi$ .

Si  $P$  est le fibré trivial sur un ouvert de coordonnées  $(U, x_1, \dots, x_n)$  :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}^1 \times U &\longrightarrow U \\ (z, x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

alors le feuilletage  $\mathcal{R}$  est donné par une 1-forme du type :  $\omega = -dz + \alpha + \beta z + \gamma z^2$ , avec  $\alpha, \beta$ , et  $\gamma$  des 1-formes méromorphes sur  $U$ . L'équation différentielle correspondante  $dz = \alpha + \beta z + \gamma z^2$  est appelée *équation de Riccati*. Les pôles de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  donnent le diviseur de  $X$  au dessus duquel le feuilletage n'est pas transverse à  $\pi$ .

D'un système  $dY = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix} Y$ , on peut déduire une équation différentielle dite *de Riccati* : en effet si  $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))$  est une solution locale de ce système, on peut se demander ce qui régit la trajectoire de  $\mathbb{P}Y(x) \in \mathbb{P}^1$ ; dans la carte  $y_2 \neq 0$  on peut remarquer que si  $y = y_1/y_2$  alors  $y(x)$  vérifie l'équation  $dy = dy_1/y_2 - \frac{y_1 dy_2}{y_2^2} = \frac{uy_1 + vy_2}{y_2} - y_1 \frac{wy_1 + ty_2}{y_2^2} = -wy^2 + (u - t)y + v$ .

On peut ainsi obtenir toute équation de Riccati en projectivant un système à trace nulle ( $u + t = 0$ ).

Si l'équation de Riccati  $\omega = 0$  est la projectivisation d'un système  $dY = \begin{pmatrix} \beta/2 & \alpha \\ -\gamma & -\beta/2 \end{pmatrix} Y$ , un calcul direct montre que l'intégrabilité de  $\omega$  équivaut

à la platitude de la connexion associée au système. Ainsi, toute connexion méromorphe plate de rang 2 se projectivise en un feuilletage de Riccati. Par contre, la réciproque n'est claire que localement, notamment tous les  $\mathbb{P}^1$ -fibrés ne sont pas nécessairement des projectivisés de fibrés de rang 2, cela dépend de la base  $M$  du fibré, voir discussion plus loin.

Voyant localement les feuilletages de Riccati comme projectivisés de fibrés de systèmes à traces nulles, on peut définir la notion de *feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques*. De même, on peut utiliser les formes normales pour les systèmes à pôles logarithmiques données précédemment pour en déduire des formes normales pour les équations de Riccati.

**Proposition 1.1.16.** — Soient  $H : x_1 = 0$  un diviseur lisse de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  et  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques sur  $(\mathbb{C}^n, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ , de diviseur polaire  $H$ . Après un isomorphisme de  $\mathbb{P}^1$ -fibré, le feuilletage  $\mathcal{R}$  est un feuilletage donné par une des équations suivantes :

$$dz = z\theta \frac{dx_1}{x_1}, dz = (nz + x_1^n) \frac{dx_1}{x_1}, n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{C}$$

**Définition 1.1.17.** — Dans le premier cas de la proposition précédente, on dit que  $\pm\theta$  est l'exposant associé à  $x_1 = 0$ . Dans le second cas, l'exposant associé à  $x_1 = 0$  est  $\pm n$ . Comme c'est une définition locale, la notion d'exposant peut aussi être utilisée pour les pôles logarithmiques des  $\mathfrak{sl}_2$ -connexions plates de rang deux.

Tout automorphisme holomorphe du  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $(\mathbb{C}^n, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  est donné par  $(x, z) \mapsto (x, A(x).z)$  avec  $A : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  holomorphe, mais la fonction  $A$  se relève en  $B : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Ainsi toute conjugaison locale holomorphe entre équations de Riccati provient d'une conjugaison holomorphe entre les systèmes à traces nulles correspondants. Par contre, si la fonction  $A$  n'est définie que sur  $x_1 \neq 0$ , la fonction  $B$  peut être multiforme ("biforme" ici). On a toutefois l'énoncé suivant.

**Lemme 1.1.18.** — Soit  $x_1$  une fonction coordonnée sur  $(\mathbb{C}^n, 0)$ .

- Si  $\mathcal{R} : dz = z\theta \frac{dx_1}{x_1}$ , avec  $\theta \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , alors tout automorphisme  $\Phi$  du  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $(\mathbb{C}^n, 0) \setminus \{x_1 = 0\} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \setminus \{x_1 = 0\}$  tel que  $\Phi^*\mathcal{R}|_{x_1 \neq 0} = \mathcal{R}|_{x_1 \neq 0}$  se prolonge en un automorphisme holomorphe de  $(\mathbb{C}^n, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ .
- Si  $\mathcal{R} : dz = (nz + x_1^n) \frac{dx_1}{x_1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , alors tout automorphisme  $\Phi$  du  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $(\mathbb{C}^n, 0) \setminus \{x_1 = 0\} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \setminus \{x_1 = 0\}$  tel que  $\Phi^*\mathcal{R}|_{x_1 \neq 0} = \mathcal{R}|_{x_1 \neq 0}$  se prolonge en un automorphisme holomorphe de  $(\mathbb{C}^n, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ .

*Démonstration.* — On suit la preuve de l'énoncé analogue pour les systèmes (lemme 1.1.14), en envisageant que la matrice  $H(x) \in \mathrm{SL}_2$  de conjugaison soit "biforme". Dans le premier cas on trouve  $H = \begin{bmatrix} \alpha & c_1 x_1^\theta \\ c_2 x_1^{-\theta} & \delta \end{bmatrix}$ , pour que  $H$  soit au plus "biforme", il faut  $\theta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  ou ( $c_1 = 0$  et  $c_2 = 0$ ). Comme  $\theta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  est exclu par hypothèse,  $H = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$  est constante et se prolonge holomorphiquement à  $x_1 = 0$ . Dans le second cas, toutes les solutions de l'équation sont uniforme et se prolongent, comme dans le lemme 1.1.14.  $\square$

**Remarque 1.1.19.** — L'hypothèse  $\theta \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  ci-dessus est nécessaire puisque  $\tilde{z} = \frac{x^n}{z}$  est une symétrie de  $\frac{dz}{z} = \frac{n}{2} \frac{dx}{x}$ .

si  $\theta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , on a toutefois ce qui suit.

**Lemme 1.1.20.** — Soit  $x_1$  une fonction coordonnée sur  $(\mathbb{C}^n, 0)$ .

Si  $\mathcal{R} : dz = \frac{n}{2} z \frac{dx}{x}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , alors tout automorphisme  $\Phi$  du  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $(\mathbb{C}^n, 0) \setminus \{x_1 = 0\} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \setminus \{x_1 = 0\}$  tel que  $\Phi^* \mathcal{R}|_{x_1 \neq 0} = \mathcal{R}|_{x_1 \neq 0}$  se prolonge en un automorphisme biméromorphe de  $(\mathbb{C}^n, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ .

*Démonstration.* — On reprend la preuve du premier point du lemme précédent. Si  $n$  est pair, toute solution  $H$  de la forme indiquée se prolonge en un élément de  $\mathrm{SL}_2(\mathcal{M})$ . Si  $n$  est impair, tous les coefficients doivent avoir la même monodromie et donc  $\alpha = \delta = 0$  ou  $c_1 = c_2 = 0$  et  $H$  se prolonge en un élément de  $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{M})$ .  $\square$

**1.1.3. Monodromie.** — Si  $\mathcal{R}$  est un feuilletage de Riccati sans pôle sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi : P \rightarrow X$ , alors toute feuille  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{R}$  munie de la restriction de  $\pi$  est un revêtement de  $X$ , voir [CLN85, chapter V]. En particulier, si  $x_0 \in X$ , les lacets dans  $X$  de point base  $x_0$  se relèvent dans  $\mathcal{L}$  et  $\pi_1(X, x_0)$  agit transitivement sur  $\mathcal{L} \cap \pi^{-1}(x_0)$ . On obtient ainsi une action de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $\pi^{-1}(x_0)$ . On voit que cette action est une action par biholomorphismes sur  $\pi^{-1}(x_0)$ . Après choix d'un isomorphisme  $\pi^{-1}(x_0) \simeq \mathbb{P}^1$ , en posant  $\alpha.y = \rho(\alpha)^{-1}.y$ , on obtient une représentation  $\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ , appelée *représentation de monodromie* de  $\mathcal{R}$ . Le choix d'un autre isomorphisme donne une représentation conjuguée, ainsi on doit considérer plutôt que  $\rho$  sa classe de conjugaison  $[\rho]$ , qu'on appelle aussi représentation de monodromie, par abus de langage.

Si  $\nabla$  est une connexion plate holomorphe sur un fibré vectoriel de rang 2  $\pi : V \rightarrow X$ , la même démarche permet d'associer à  $\nabla$  une classe de conjugaison

de représentations  $\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ , encore appelée représentation de monodromie de  $\nabla$ , cf [Law77, chapitre II].

Ces constructions peuvent s'interpréter en termes de problème de Darboux (voir [Sha97, chapitre 1]) et la condition d'intégrabilité pour une équation de Riccati ou un système correspond à la condition locale pour résoudre ledit problème. De cette manière, on peut voir que la représentation de monodromie d'une  $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ -connexion est à valeurs dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .

La représentation de monodromie d'un feuilletage de Riccati (resp. d'une connexion plate) sans pôle, caractérise, à isomorphisme biholomorphe de fibré près, le feuilletage (resp. la connexion), cf [CLN85, chapitre V Theorems 2–3]. On se référera à cette propriété en parlant d'*unicité de la suspension*.

On peut voir localement qu'on a le diagramme commutatif suivant, où  $\mathbb{P}$  désigne l'opération de projectivisation.

$$\begin{array}{ccc} \nabla & \xrightarrow{\text{monodromie}} & (\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) \\ \mathbb{P} \downarrow & & \mathbb{P} \downarrow \\ \mathcal{R} & \xrightarrow{\text{monodromie}} & (\tilde{\rho} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})) \end{array}$$

Pour les feuilletages de Riccati (resp. les connexions plates) à lieu polaire  $D$  non-vide, la représentation de monodromie est définie comme la représentation de monodromie du feuilletage (resp. de la connexion) restreint au complémentaire du lieu polaire, c'est donc une représentation du groupe  $\pi_1(X \setminus D)$ .

Notons qu'on peut calculer la monodromie de nos modèles locaux logarithmiques.

**Lemme 1.1.21.** — Soit  $(x_1, \dots, x_k)$  les coordonnées standard sur  $\Delta^k$  et  $\alpha(t) = \{x_1 = 1/2 \exp(2i\pi t), x_i = 0 \text{ si } i > 1\}, t \in [0, 1]$ .

- Si  $\nabla$  est la connexion donnée par  $dY = A_\theta Y$  sur le fibré  $\mathbb{C}^2 \times \Delta^k \rightarrow \Delta^k$  alors sa monodromie est donnée par :

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(\Delta^k \setminus \{x_1 = 0\}) &\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \\ \alpha &\longmapsto \begin{bmatrix} \exp(i\pi\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\pi\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Si  $\nabla$  est la connexion donnée par  $dY = B_n Y$  sur le fibré  $\mathbb{C}^2 \times \Delta^k \rightarrow \Delta^k$  alors sa monodromie est donnée par :

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(\Delta^k \setminus \{x_1 = 0\}) &\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \\ \alpha &\longmapsto \begin{bmatrix} (-1)^n & 1 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$



*Démonstration.* — On résout explicitement les systèmes et regarde la monodromie des solutions.  $\square$

**Remarque 1.1.22.** — Après projectivisation, on obtient donc  $\alpha \mapsto (z \mapsto \exp(2i\pi\theta)z)$  pour le modèle  $dz = z\theta dx_1/x_1$  et  $\alpha \mapsto (z \mapsto z + 1)$  pour  $dz = (nz + x_1^n)dx_1/x_1$ .

## 1.2. Groupe fondamental

Pour comprendre les représentations de monodromie des connexions et des feuilletages de Riccati, il convient de pouvoir comprendre le groupe fondamental du complément d'une hypersurface dans une variété complexe lisse  $X$ . On s'intéresse particulièrement au cas  $X = \mathbb{P}^2$ . On présente d'abord des énoncés généraux sur les propriétés de  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C})$  ou de ses représentations en fonction de propriétés simples de  $\mathcal{C}$ . Ensuite on donne les grandes lignes de l'algorithme standard -coûteux- de calcul d'une présentation de  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}, b)$  par générateurs et relations, dont les générateurs sont des lacets explicites, ce qui permet de bien comprendre les monodromies locales. Cet algorithme est l'algorithme de *Zariski-Van Kampen*.

### 1.2.1. Propriétés générales. —

**Proposition 1.2.1.** — Soit  $X$  une variété complexe lisse. Soit  $D$  une hypersurface de  $X$ . Soit  $i : X \setminus D \rightarrow X$  l'inclusion. Alors le morphisme induit  $i_* : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \pi_1(X)$  est surjectif.

*Démonstration.* — Voir [Shi].  $\square$

On peut décrire le noyau du morphisme considéré dans cette proposition.

**Définition 1.2.2.** — Soit  $D$  une hypersurface de  $X$  comme précédemment et  $H$  une ses composantes irréductibles. Si  $x \in H$  est un point où  $D$  est lisse, dans une bonne carte  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $X$  sur un voisinage de  $x$ ,  $D$  a pour équation  $x_1 = 0$ . Soit  $\gamma(t) = (x_1 = \exp(2i\pi t), x_2 = 0, \dots, x_n = 0)$ ,  $t \in [0, 1]$  un lacet dans cette carte. On dira que  $\gamma$  est un lacet simple qui fait le tour de  $H$  dans  $X \setminus D$  (dans le sens direct ;  $\gamma(1-t)$  est aussi un lacet simple faisant le tour de  $H$  mais dans le sens indirect). Un lacet déduit d'un tel  $\gamma$  par changement de point base pour  $\pi_1(X \setminus D)$  est encore appelé de la même manière.

**Proposition 1.2.3.** — Dans les conditions de la proposition précédente, avec  $(D_k)$  les composantes irréductibles de  $D$ . Soit, pour tout  $k$ ,  $\gamma_k \in \pi_1(X \setminus D, \star)$ ,

un lacet simple faisant le tour de  $D_k$  dans  $X$  le noyau de  $i_*$  est le plus petit sous groupe normal de  $\pi_1(X \setminus D)$  contenant les  $\gamma_k$ .

*Démonstration.* — Voir [Shi]. □

**Théorème 1.2.4 (Deligne).** — Soit  $C \subset \mathbb{P}^2$  une courbe à croisements normaux. Le groupe  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$  est abélien.

*Démonstration.* — Voir [Del81]. □

**Théorème 1.2.5 (Cerveau-Loray).** — Soit  $C \subset \mathbb{P}^2$  une courbe irréductible de degré  $p^s$  avec  $p$  premier. Toute représentation de  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$  vers le groupe des transformations affines de  $\mathbb{C}$  est abélienne.

*Démonstration.* — Voir [CL98, Théorème 1]. □

**1.2.2. Algorithme.** — L'outil principal de cet algorithme est le théorème topologique suivant, dû à Zariski et Van-Kampen :

**Théorème 1.2.6.** — Soit  $p : E \rightarrow B$  un fibré localement trivial qui possède une section  $s$ , avec  $E$  connexe par arcs. Soit  $b \in B$  et  $F_b$  sa fibre.

Le groupe fondamental de  $E$  est donné par la suite exacte scindée suivante  $0 \rightarrow \pi_1(F_b, b) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, b) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B, b) \rightarrow 0$ . La section est donnée par  $s_*$ .

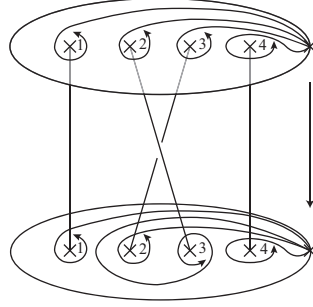
*Démonstration.* — Voir [Shi]. □

Précisons l'action du facteur  $\pi_1(B, b)$  sur  $\pi_1(F_b, b)$  pour le produit semi-direct  $\pi_1(B, b) \ltimes \pi_1(F_b, b)$  induit par cette suite exacte. Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  un lacet partant de  $b$ ,  $\gamma^*E$  est un fibré localement trivial de base simplement connexe, il est donc trivialisable :  $\gamma^*E \cong [0, 1] \times F_b$  et tout lacet  $\tau_0$  de  $F_b$  de point de base  $b$  se déforme continument en  $\tau_t$ , un lacet de point de base  $\gamma(t)$  dans la fibre  $F_{\gamma(t)}$ . On définit ainsi une action de  $\gamma \in \pi_1(B, b)$  sur  $\pi_1(F_b, b)$  en posant  $\tau_0 \cdot \gamma = \tau_1$  ; c'est l'action qui intervient dans la structure de produit semi-direct mentionnée ci-haut.

Dans le cas où  $F_b$  est un disque épointé, l'action correspond à l'action d'une tresse, comme indiqué dans la figure 4.

Pour appliquer ce théorème au calcul de  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ , on éclate  $\mathbb{P}^2$  en un point  $A$  non contenu dans  $C$ . Le réglage de la surface  $\mathbb{F}_1$  ainsi obtenue restreint au complémentaire de la transformée stricte de  $C$  donne un fibré localement trivial, pourvu qu'on retire aussi un certain nombre de fibres de ce réglage. La section est alors donnée par le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

On recolle ensuite les fibres qu'on avait enlevées par le théorème de Van Kampen. Cela est expliqué en détails dans [Shi].

FIGURE 1. Action de la tresse  $\sigma_2$ 

### 1.3. Correspondance de Riemann-Hilbert

On développe ici les relations entre un feuilletage de Riccati ou une connexion plate et sa représentation de monodromie.

**Définition 1.3.1.** — Pour une connexion plate ou un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques, une composante de pôle est dite *apparente* si la matrice de monodromie associée à un lacet simple qui fait le tour de cette composante est triviale. De même, pour une connexion plate logarithmique  $\nabla$ , une composante de pôle est dite *projectivement apparente* si c'est un pôle apparent pour le feuilletage de Riccati associé  $\mathbb{P}(\nabla)$ . Cette notion de pôle (projectivement) apparent se prolonge pour toute représentation  $\pi_1(X \setminus D) \rightarrow (\mathrm{P})\mathrm{SL}_2$  de manière naturelle.

**Lemme 1.3.2.** — Si deux feuilletages de Riccati à pôles logarithmiques sans pôle apparent ont les mêmes composantes de pôles  $(H_i)$  avec les mêmes exposants  $\theta_i \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  associés, ainsi que la même représentation de monodromie, alors ils sont conjugués par un isomorphisme holomorphe de  $\mathbb{P}^1$ -fibrés.

*Démonstration.* — En dehors du lieu polaire, on construit un isomorphisme  $\phi$  par unicité de la suspension. Ensuite, au voisinage d'un point lisse du lieu polaire, on constate que cet isomorphisme se prolonge holomorphiquement par le lemme 1.1.18. On a alors prolongé holomorphiquement cet isomorphisme  $\phi$  en dehors d'un ensemble analytique de codimension  $> 1$ , on peut donc le prolonger partout.  $\square$

On a un énoncé analogue pour les  $\mathrm{sl}_2$ -connexions.

**Lemme 1.3.3.** — *Si deux  $\mathrm{sl}_2$ -connexions méromorphes de rang 2 à pôles logarithmiques et sans pôle projectivement apparent ont les mêmes composantes de pôles  $(H_i)$  avec les mêmes exposants  $\theta_i$  associés, ainsi que la même représentation de monodromie, alors elles sont conjuguées par une isomorphisme holomorphe de fibrés vectoriels.*

*Démonstration.* — C'est la même preuve que pour l'énoncé précédent, en remplaçant le lemme 1.1.18 par le lemme 1.1.14.  $\square$

Soit  $D$  un diviseur réduit sur une variété lisse  $X$ . Soient  $D_i$  ses composantes irréductibles. Soit  $\star$  un point de  $X \setminus D$ . Soit, pour tout  $i$ ,  $\alpha_i$  un lacet simple fermé de base  $\star$  faisant le tour de  $D_i$  dans le sens direct. Pour toute  $\mathrm{sl}_2$ -connexion plate logarithmique sans pôle projectivement apparent  $\nabla$  sur un fibré  $V \rightarrow X$  de pôle exactement  $D$  et logarithmique qui a les exposants  $\theta_i$  associés aux  $D_i$ ,  $\rho = \rho_\nabla$  doit être telle que  $\rho(\alpha_i)$  est conjuguée à  $\begin{bmatrix} \exp(i\pi\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\pi\theta) \end{bmatrix}$  si  $\theta \notin \mathbb{N}$  et à  $\begin{bmatrix} (-1)^n & 1 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$  si  $\theta = n \in \mathbb{N}$ .

Dans cette situation, on dira que  $\rho$  est compatible avec les exposants  $\theta_i$ .

Notre travail est motivé par le résultat suivant.

**Théorème 1.3.4 (Deligne).** — *Soit  $D$  un diviseur réduit à croisements normaux sur une variété projective lisse  $X$ . Soient  $(D_i)_{i \in I}$  ses composantes irréductibles et pour tout  $i \in I$ ,  $\theta_i \in \mathbb{C}$ . Toute représentation  $\rho : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  qui est compatible avec les  $\theta_i$  est la représentation de monodromie d'une  $\mathrm{sl}_2$ -connexion plate logarithmique de rang 2 sur  $X$ , de lieu polaire  $D$  et telle que, pour tout  $i$ ,  $\theta_i$  est l'exposant associé à  $D_i$ .*

*Démonstration.* — On recouvre  $X$  par  $U = X \setminus D$  et des ouverts assez petits  $(U_j)_{j \in J}$  tels que  $D \subset \cup U_j$ , par compacité, on peut supposer  $J$  fini :  $J = [1, \dots, n]$ . On définit le fibré à connexion recherché au dessus de  $U$  par suspension. Au dessus de chaque  $U_i$ , le fibré à connexion doit se redresser sur le fibré trivial avec un modèle standard : voir modèles abéliens ci-dessous (le groupe fondamental local d'un croisement normal est abélien). On colle successivement ces modèles au fibré déjà construit par le lemme 1.3.3.  $\square$

On a un analogue pour les feuilletages de Riccati. La notion de compatibilité avec les exposants se prolonge pour les feuilletages de Riccati, puisque c'est une condition locale.

**Théorème 1.3.5.** — *Soit  $D$  un diviseur réduit à croisements normaux sur une variété projective lisse  $X$ . Soient  $(D_i)_{i \in I}$  ses composantes irréductibles et pour tout  $i \in I$ ,  $\theta_i \in \mathbb{C}, \theta_i \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ . Soit  $\rho : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$*

compatible avec les  $\theta_i$ , qui se relève localement à  $\mathrm{SL}_2$  et sans pôle apparent. Il existe un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques de lieu polaire  $D$  dont la monodromie est  $\rho$  et tel que, pour tout  $i$ ,  $\theta_i$  est l'exposant associé à  $D_i$ .

*Démonstration.* — C'est le même schéma de preuve que le théorème de Deligne ci-dessus, en remplaçant le lemme 1.3.3 par le lemme 1.3.2.  $\square$

**Remarque 1.3.6.** — L'hypothèse de relèvement local est nécessaire puisque

1. Tout feuilletage de Riccati se relève localement en une connexion.
2. Toutes les représentations de  $\pi_1$  ne se relèvent pas localement à  $\mathrm{SL}_2$ , comme le montre l'exemple de  $\pi_1((\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{xy = 0\}) \simeq \mathbb{Z}^2$  avec  $\rho(1, 0) = (z \mapsto 1/z)$  et  $\rho(0, 1) = (z \mapsto -z)$ ; cet exemple est un exemple de [LP07].

Fixons  $D = \cup D_i$  et  $(\theta_i)$ . On a une application

*Monodromie :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sl}_2 - \text{connexions logarithmiques sans pôle projectivement} \\ \text{apparent de lieu polaire } D \text{ et d'exposants associés } (\theta_i) \end{array} \right\}$$

$\downarrow$

{classes de conjugaisons de représentations  $\rho : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  compatibles aux  $\theta_i$ }.

Lorsque  $D$  est à croisements normaux, le théorème 1.3.4 montre qu'elle est surjective. Le lemme 1.3.3 montre que si on quotiente l'ensemble de départ par la relation "être holomorphiquement conjuguées", on en déduit une bijection. Cette bijection est appelée correspondance de Riemann-Hilbert.

De la même façon, on a unicité du feuilletage de Riccati produit par le théorème 1.3.5, d'après le lemme 1.3.2.

**Proposition 1.3.7 (Modèles abéliens pour feuilletages de Riccati)**

Soit  $U = \mathbb{C}^n$  ou un polydisque. Soit  $D = \{\prod_k F_k = 0\}$  un diviseur réduit sur  $\mathbb{C}^n$  dont les  $D_k = \{F_k = 0\}$  sont les composantes irréductibles.

Soit  $\rho : \pi_1(U \setminus D) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  une représentation abélienne. Par projection,  $\rho$  induit une représentation  $\bar{\rho}$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . L'image de  $\bar{\rho}$  est alors, à conjugaison près, un groupe linéaire ou un groupe de translation.

Soit, pour tout  $k$ ,  $\gamma_k$  un lacet simple qui fait le tour de la composante  $D_k$ .

– Dans le premier cas, la représentation est donnée par

$$\bar{\rho} : \gamma_k \mapsto (z \mapsto \lambda_k \times z).$$

Alors cette représentation peut être produite grâce à l'équation de Riccati suivante :

$$dz = \left( \sum_k \theta_k \frac{dF_k}{F_k} \right) z,$$

où  $\theta_k$  est tel que  $\lambda_k = e^{2i\pi\theta_k}$ .

– Dans le second cas, la représentation est donnée par

$$\bar{\rho}: \gamma_i \mapsto (z \mapsto z + \tau_i).$$

Alors cette représentation peut être produite par toute équation de Riccati de la forme suivante si les  $c_k$  y sont bien choisis :

$$dz = \left( \sum_k n_k \frac{dF_k}{F_k} \right) z + \prod_j F_j^{n_j} \sum_k c_k \frac{dF_k}{F_k}.$$

*Démonstration.* — Les deux équations peuvent être intégrées explicitement par intégrations successives de formes fermées. Dans le premier cas on obtient  $z = c \prod_k F_k^{\theta_k}$ , dans le second  $z = (c \prod_k F_k^{n_k}) (K + \sum_i c_i \log F_i)$ . On voit que si les  $c_k$  sont bien choisies, les monodromies requises sont obtenues.  $\square$

On voit qu'en relevant ces modèles en des connexions on obtient des modèles locaux pour les  $\mathfrak{sl}_2$ -connexions sans pôle apparent, ce sont ceux qu'on évoquait dans la preuve du théorème 1.3.4.

On verra plus loin que ces modèles permettent d'identifier les fibrés qui apparaissent pour les feuilletages de Riccati à monodromie abélienne au dessus de  $\mathbb{P}^2$ .

#### 1.4. Fibrés en $\mathbb{P}^1$ , fibrés de rang deux sur $\mathbb{P}^2$

On donne ici, sans preuve, les résultats sur les  $\mathbb{P}^1$ -fibrés, les fibrés de rang 2 et leurs transformations qu'on utilisera par la suite. On commence à décrire ce qui se passe quand la base du fibré est  $\mathbb{P}^1$ .

**Théorème 1.4.1 (Birkhoff-Grothendieck).** — *Tout fibré vectoriel holomorphe  $E$  de rang  $k$  sur  $\mathbb{P}^1$  est scindé :  $E = \mathcal{O}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n_k)$ .*

**Théorème 1.4.2 (Grothendieck).** — *Tout fibré en  $\mathbb{P}^1$  localement trivial  $F \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un projectivisé de fibré vectoriel de rang 2 :  $F = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$ ,  $n \geq 0$ . La section holomorphe de  $F$  induite par l'inclusion*

$$\mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n)$$

*est d'autointersection  $-n$  et, si  $n > 0$ , elle est l'unique section holomorphe de  $F$  d'autointersection négative.*

Les fibrés en  $\mathbb{P}^1$  au dessus de  $\mathbb{P}^1$  sont donc caractérisés à isomorphisme près par la plus petite autointersection qui apparaît pour leurs sections.

Le théorème de Birkhoff-Grothendieck donne une piste pour l'étude des fibrés vectoriels  $V$  de rang 2 au dessus de  $\mathbb{P}^2$  : on peut regarder quelles sont les valeurs de  $a_\delta$  et  $b_\delta$  avec  $a_\delta \geq b_\delta$  qui apparaissent dans le scindage de la restriction  $V|_\delta = \mathcal{O}(a_\delta) \oplus \mathcal{O}(b_\delta)$ , de  $V$  aux droites  $\delta$  de  $\mathbb{P}^2$ . La valeur  $a_\delta + b_\delta$  est constante puisque c'est le degré de  $V$ . Les variations de  $(a_\delta, b_\delta)$  se réduisent donc à celles de  $a_\delta - b_\delta$ . On peut montrer que pour  $\delta \in \check{\mathbb{P}}^2$  générique,  $(a_\delta, b_\delta) = \min\{(a_\delta, b_\delta) | \delta \in \check{\mathbb{P}}^2\}$ , où le  $\min$  est pour l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{Z}^2$ . Les droites  $\delta$  pour lesquelles  $a_\delta - b_\delta$  n'est pas générique sont appelées droites de saut de  $V$ . On pourrait penser, de prime abord, que si  $V$  n'a pas de droite de saut, alors le fibré est scindé. Il n'en est rien puisque le fibré tangent à  $\mathbb{P}^2$  n'est pas scindé (cf [OSS80, Lemma 4.1.2 p 74]).

On a toutefois la propriété intéressante suivante.

**Lemme 1.4.3.** — *Tout fibré vectoriel de rang 2 sur  $\mathbb{P}^2$  qui contient un sous-fibré propre est scindé.*

*Démonstration.* — Voir [OSS80, p 29]. □

On peut se demander comment ces idées se transposent dans le langage des  $\mathbb{P}^1$ -fibrés sur  $\mathbb{P}^2$ . Si  $X$  est une variété projective lisse, par projectivisation on peut déduire un  $\mathbb{P}^1$ -fibré de tout fibré de rang 2, mais en général tous les  $\mathbb{P}^1$ -fibrés ne se présentent pas de cette manière. Il existe une théorie pour ces questions : l'obstruction à relever un fibré projectif en un fibré vectoriel est mesurée par un élément du groupe de Brauer de  $X$ , qui est un sous groupe de torsion de  $H^2(X, \mathcal{O}^*)$ , voir [Ele82]. Plus précisément, l'élément d'obstruction pour un  $\mathbb{P}^1$ -fibré est un élément de 2-torsion de  $H^2(X, \mathcal{O}^*)$ . En particulier, dès que  $X$  est une courbe compacte ou  $X = \mathbb{P}^n$ , tous les  $\mathbb{P}^1$ -fibrés proviennent de fibrés de rang 2. On voit facilement que deux fibrés vectoriels de rang deux  $E$  et  $F$  donnent le même  $\mathbb{P}^1$ -fibré si et seulement si  $E = F \otimes L$ , pour un fibré en droite  $L$ .

Ainsi la notion de droite de saut pour un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P = \mathbb{P}(E)$  sur  $\mathbb{P}^2$  est bien définie : les droites de saut pour  $P$  sont celles de  $E$ . On a aussi le corollaire utile suivant du lemme 1.4.3 et de  $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}^*) = 0$ .

**Proposition 1.4.4.** — *Soit  $P$  un  $\mathbb{P}^1$ -fibré sur  $\mathbb{P}^2$  qui possède une section holomorphe. Alors  $P$  est le projectivisé d'un fibré de rang 2 scindé.*

**Définition 1.4.5.** — Soit  $\pi : P \rightarrow X$  un  $\mathbb{P}^1$  fibré au dessus d'une variété lisse  $X$ . Soit  $H$  une hypersurface lisse de  $X$  et  $S$  l'image d'une section holomorphe

de  $P|_H$ . La transformation élémentaire de  $\pi$  de centre  $S$  est donnée par la composée  $\phi$  de deux transformations birationnelles de l'espace total  $P$ . D'abord on éclate  $S$  dans  $P$ , puis on contracte la transformée stricte de  $\pi^{-1}(H)$ . Soit  $\tilde{P}$  l'espace ainsi obtenu, on en déduit un fibré en  $\mathbb{P}^1$  au dessus de  $X$  en utilisant la projection  $\tilde{\pi} = \phi_*\pi$ .

En coordonnées locales, on peut voir qu'une telle transformation est une transformation biméromorphe de fibrés. Quand  $X$  est de dimension 2,  $H$  est de dimension 1 et toutes les sections méromorphes de  $P|_H$  sont holomorphes. De surcroît avec  $X$  de dimension 2 et  $H$  non nécessairement lisse, Loray et Pereira [LP07, pp. 736-737] ont montré qu'on peut encore définir la transformation élémentaire centrée en toute section méromorphe de  $H$ , de manière à prolonger la transformation que nous venons de définir pour  $P|_{X \setminus \text{sing}(H)}$ . Ceci se fait en désingularisant d'abord  $H$ , puis en procédant à la transformation le long de la transformée stricte de  $S$ , puis en contractant ensuite le fibré ainsi obtenu, ce qui est la partie délicate du travail et se fait par le lemme 1.7.1.

Si  $X$  est de dimension 1, indiquons le comportement de l'autointersection d'une section quand on applique une opération élémentaire.

**Proposition 1.4.6.** — *Soit  $\sigma$  une section d'un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $F$ . Soit  $\tilde{\sigma}$  sa transformée stricte par une opération élémentaire centrée en  $p \in F$ . Alors*

$$\tilde{\sigma}^2 = \begin{cases} \sigma^2 - 1 & \text{si } p \in \sigma, \\ \sigma^2 + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voici un exemple qui illustre les idées précédentes.

**Exemple 1.4.7.** — On donne un exemple de fibré en  $\mathbb{P}^1$  au dessus de  $\mathbb{P}^2$  dont les droites de saut sont isolées.

Soit  $C$  une conique lisse et  $\delta$  une droite de  $\mathbb{P}^2$ , non tangente à  $C$ . On va construire notre exemple en faisant des opérations élémentaires à partir du fibré trivial  $E := \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ . Soit  $\sigma$  une section de degré 2 de  $E|_C$ , soit  $z_0$  une valeur prise en dehors de  $\delta$  deux fois par la section  $\sigma : \sigma(x_1) = z_0 = \sigma(x_2)$ ,  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_i \notin \delta$ . Soit  $s : \delta \rightarrow \mathbb{P}^1, x \mapsto z_0$  une section constante de  $E|_\delta$ . Le  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P$  obtenu en faisant successivement les opérations élémentaires centrées en  $\sigma$  et en la transformée stricte de  $s$  peut être décrit en restriction à toute droite  $\Delta$ ; il suffit de constater que l'autointersection de la transformée stricte de  $\{z = z_0\}|_\Delta$  dans  $P|_\Delta$  est strictement négative :

Soit  $P$  le fibré en  $\mathbb{P}^1$  décrit ci-dessus. Soit  $\Delta$  une droite de  $\mathbb{P}^2$ .

- Si  $\Delta = (x_1x_2)$  ou si  $\Delta$  est la tangente à  $C$  en  $x_1$  ou  $x_2$  alors  $P|_\Delta = \mathbb{F}_3$  est la troisième surface de Hirzebruch.



- Sinon  $P|_{\Delta} = \mathbb{F}_1$  est la première surface de Hirzebruch.

En particulier, les droites de saut de  $P$  sont au nombre de trois et donc isolées.

Notons le fait suivant.

**Proposition 1.4.8.** — Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{C}$ .

- Si  $\mathcal{R}$  est le feuilletage de Riccati défini par  $dz = \theta z \frac{dx}{x}$  alors l'image de  $\mathcal{R}$  par la transformation élémentaire centrée en  $(z = 0, x = 0)$  est biholomorphiquement conjugué à  $dz = (\theta - 1)z \frac{dx}{x}$ .
- Si  $\mathcal{R}$  est le feuilletage de Riccati défini par  $dz = (nz + x^n) \frac{dx}{x}$  alors l'image de  $\mathcal{R}$  par la transformation élémentaire centrée en  $(z = 0, x = 0)$  est biholomorphiquement conjugué à  $dz = ((n - 1)z + x^{n-1}) \frac{dx}{x}$ .
- Si pour l'un ou l'autre de ces modèles on fait une transformation élémentaire centrée en  $z = z_0$ ,  $z_0 \neq 0, \infty$  alors le feuilletage de Riccati qu'on obtient a un pôle double en  $x = 0$ .

*Démonstration.* — La transformation élémentaire centrée en  $z = z_0$ ,  $z_0 \neq \infty$  est donnée par le changement de variable  $\tilde{z} = (z - z_0)/x$ , ainsi ces trois points se voient par un calcul direct.  $\square$

On voit ainsi que quitte à faire des transformations élémentaires, deux feuilletages de Riccati à pôles logarithmiques qui ont même monodromie ont les mêmes exposants, on peut en déduire ce qui suit.

**Proposition 1.4.9.** — Soit  $X$  une variété complexe lisse de dimension  $n \leq 2$ . Soient  $(P, \mathcal{R})$  et  $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{R}})$  deux  $\mathbb{P}^1$  fibrés au dessus de  $X$  munis de feuilletages de Riccati. Si  $\mathcal{R}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$  ont même représentation de monodromie, alors ils sont biméromorphiquement conjugués.

*Démonstration.* — On vient de voir qu'on peut supposer que  $\mathcal{R}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$  ont les mêmes exposants. Ensuite, par unicité de la suspension, on peut construire une conjugaison biholomorphe en dehors de leur lieu polaire commun. Par les lemmes 1.1.18 et 1.1.20, on voit que la conjugaison se prolonge de façon bimorphe en tout point lisse de du lieu polaire. Cette conjugaison se prolonge alors partout par le théorème de prolongement de Levi.  $\square$

Enfin, notons que, par un théorème d'annulation de Serre, nous avons le fait suivant.

**Théorème 1.4.10.** — Soit  $X$  une variété projective lisse. Soit  $E$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $X$ . Son projectivisé  $\mathbb{P}(E)$  est birationnellement équivalent au  $\mathbb{P}^1$ -fibré trivial sur  $X$ .

### 1.5. Formule de Camacho-Sad

On donne un moyen de calcul de l'autointersection des courbes invariantes lisses d'un feuilletage holomorphe, en vu de l'appliquer à des sections de  $\mathbb{P}^1$ -fibrés.

**Définition 1.5.1.** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe singulier sur une surface complexe lisse. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe lisse invariante par  $\mathcal{F}$ . Soit  $p$  une singularité de  $\mathcal{F}$ . Soient  $\omega$  une 1-forme holomorphe à zéros isolés définissant le feuilletage  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $p$  et  $(x, y)$  un système de coordonnées local centré en  $p$ , tel que  $\mathcal{C}$  coïncide avec  $\{y = 0\}$ . Ainsi  $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$  et l'invariance de  $\mathcal{C}$  impose  $f = ya(x) + O(y^2)$  et le fait que  $\omega$  s'annule en  $p$  donne  $g = xu(x) + O(y)$ . L'indice de Camacho-Sad de  $\mathcal{C}$  relativement à  $\mathcal{F}$  en  $p$  est le résidu de  $\frac{-a(x)}{xu(x)}dx$  en  $x = 0$ .

**Théorème 1.5.2 (Camacho-Sad).** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe singulier sur une surface complexe lisse  $X$ . Soit  $\mathcal{C}$  une courbe lisse compacte invariante par  $\mathcal{F}$ . L'autointersection de  $\mathcal{C}$  dans  $X$  est donnée par la somme des indices de Camacho-Sad de  $\mathcal{C}$  relativement à  $\mathcal{F}$ .

On va appliquer fréquemment le théorème de Camacho-Sad à des sections de  $\mathbb{P}^1$ -fibrés  $\pi : F \rightarrow \mathbb{P}^1$  qui sont invariantes par un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  porté par  $\pi$ . On donne donc les indices de Camacho-Sad correspondant à nos modèles locaux.

**Lemme 1.5.3.** — Soit  $\mathcal{R}$  le feuilletage de Riccati sur  $(\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  alors :

1. Si  $\mathcal{R}$  est donné par  $dz = \theta z \frac{dx}{x}$ , avec  $\theta \neq 0$  alors
  - (a) l'indice de Camacho-Sad de  $\{z = 0\}$  en  $(x = 0, z = 0)$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est  $\theta$  et l'indice de Camacho-Sad de  $\{z = \infty\}$  en  $(x = 0, z = \infty)$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est  $-\theta$  ;
  - (b) si il y a d'autres sections invariantes par  $\mathcal{R}$  qui passent par  $(x = 0, z = 0)$ , alors  $\theta \in \mathbb{N}^*$  et leur indice de Camacho-Sad relativement à  $\mathcal{R}$  est aussi  $\theta$ .
2. Si  $\mathcal{R}$  est défini par  $dz = (nz + x^n) \frac{dx}{x}$ , l'indice de Camacho-Sad de  $\{z = 0\}$  en  $(x = 0, z = \infty)$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est  $-n$ .

*Démonstration.* — Les assertions 1.(a) et 2. se vérifient par calcul direct.

Pour 1.(b), le fait que  $\theta \in \mathbb{N}^*$  est clair par connaissance des courbes invariantes locales de nos modèles locaux logarithmiques. Du coup, si  $\theta = n \in \mathbb{N}^*$ ,

les sections invariantes locales qui passent par  $(x = 0, z = 0)$  sont les sections de la forme  $z = Kx^n$ ,  $K \in \mathbb{C}$ . Chacune d'entre elle peut être envoyée par un automorphisme local du feuilletage ( $\tilde{z} = z - Kx^n$ ) sur la section  $z = 0$ , elle a donc le même indice de Camacho-Sad que cette dernière par rapport à  $\mathcal{R}$ .  $\square$

### 1.6. Relèvement des feuilletages de Riccati en des connexions

Si  $X$  est une variété projective lisse, il est intéressant de savoir si tous les feuilletages de Riccati au dessus de  $X$  sont des projectivisés de connexions plates. Une condition nécessaire pour cela est que le  $\mathbb{P}^1$ -fibré sous-jacent soit un projectivisé de fibré vectoriel. On a vu que cette condition est systématiquement satisfaite si  $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ou si  $X$  est une courbe projective lisse.

Deux fibrés vectoriels de rang deux  $E$  et  $F$  donnent le même  $\mathbb{P}^1$ -fibré si et seulement si  $E = F \otimes L$ , pour un fibré en droite  $L$ .

Si  $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , tout  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P$  est donc le projectivisé d'un fibré vectoriel de rang deux de degré 0 ou 1 ( $\deg(F \otimes L) = \deg(F) + 2\deg(L)$ ).

La façon la plus simple de relever un feuilletage de Riccati en une connexion est de tenter de recoller les relevés locaux en  $sl_2$ -systèmes. Le lemme suivant dit quand cela peut fonctionner.

**Lemme 1.6.1.** — *Soit  $X$  une variété complexe lisse. Soient  $U_i, i = 1, 2$  deux ouverts de  $X$  avec  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Soient  $E$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $U_1 \cup U_2$ , donné par recollement de  $U_1 \times \mathbb{C}^2$  et  $U_2 \times \mathbb{C}^2$  suivant  $(x, Z_1) = (x, G.Z_2)$  où  $G \in GL_2(\mathcal{O}_{U_1 \cap U_2})$ . Soit  $P = \mathbb{P}(E)$ .*

*Si  $\mathcal{R}$  est un feuilletage de Riccati sur  $P$  donné par*

$$\mathcal{R}_i : dz_i = \alpha_i + \beta_i.z_i + \gamma_i.z_i^2$$

*au dessus de  $U_i$ , alors les connexions données par les matrices*

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \frac{\beta_i}{2} & \alpha_i \\ -\gamma_i & -\frac{\beta_i}{2} \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

*se recollent en une connexion sur  $E$  si et seulement si  $d(\det(G)) = 0$ .*

*Démonstration.* — Un calcul direct.  $\square$

On en déduit ce qui suit.

**Proposition 1.6.2.** — *Soit  $X$  une variété projective lisse. Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P(E)$ , avec  $\det(E) = \mathcal{O}$ . Alors  $\mathcal{R}$  est le projectivisé d'une unique  $\mathrm{sl}_2$ -connexion plate sur  $E$ .*

*Démonstration.* — Comme  $\det(E) = \mathcal{O}$ , en choisissant de bonnes trivialisations locales de  $E$ ,  $E$  est donné par un recouvrement  $(U_i)$  de  $X$  avec des matrices de transitions  $G_{ij}$  satisfaisant  $\det(G_{ij}) = 1$ , on peut donc appliquer le lemme ci-dessus pour recoller les relèvements locaux sous forme de  $\mathrm{sl}_2$ -systèmes.  $\square$

**Corollaire 1.6.3.** — *Si  $\mathcal{R}$  est un feuilletage de Riccati sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P = \mathbb{P}(E)$  au dessus de  $\mathbb{P}^n$ , avec  $\deg(E) \in 2\mathbb{Z}$ , alors  $\mathcal{R}$  est le projectivisé d'une unique  $\mathrm{sl}_2$ -connexion plate.*

*Démonstration.* — On a vu que  $\deg(E) \in 2\mathbb{Z}$  implique  $P = \mathbb{P}(F)$  avec  $\deg(F) = 0$ , en particulier on peut appliquer la proposition précédente pour conclure.  $\square$

Plus généralement, si on a une connexion  $\nabla$  méromorphe plate sur un fibré vectoriel de rang 2 au dessus d'une variété complexe lisse  $X$ , on déduit de  $(E, \nabla)$  d'une part un feuilletage de Riccati  $(\mathbb{P}(E), \mathcal{R})$  et d'autre part une connexion plate de rang 1  $(\det(E), \mathrm{trace}(\nabla))$ , donnée dans les trivialisations locales par les traces des matrices de connexion associées à  $\nabla$ .

Une question naturelle est alors la suivante.

**Question.** — *Étant donnés sur une variété lisse  $X$*

- *un fibré vectoriel  $E$  de rang 2,*
- *un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{P}(E)$  et*
- *une connexion plate  $t$  sur  $\det(E)$ .*

*Peut-on construire une connexion plate  $\nabla$  de rang 2 sur  $E$  telle que  $\mathbb{P}(\nabla) = \mathcal{R}$  et  $\mathrm{trace}(\nabla) = t$  ?*

La réponse à cette question est positive : au dessus d'une trivialisation de  $E$ ,  $\nabla$  est clairement déterminée par  $\mathcal{R}$  et  $t$ . Ceci a déjà été indiqué, par exemple dans [LMP09, Remark 2.1].

Ainsi, relever un feuilletage de Riccati sur  $\mathbb{P}(E)$  en une connexion plate méromorphe  $\nabla$  sur  $E$  est équivalent à donner une connexion méromorphe plate  $t$  sur  $\det(E)$ . Si  $D$  est le diviseur de pôles de  $\mathcal{R}$ , pour que le diviseur de pôles  $D'$  de  $\nabla$  satisfasse  $D \geq D'$ , il suffit que le diviseur de pôles  $D''$  de  $t$  satisfasse  $D \geq D''$ .

Pour  $X = \mathbb{P}^n$ , on voit que la connexion donnée dans une carte affine par  $dz = \left( \sum \theta_i \frac{dF_i}{F_i} \right) \cdot z$  avec  $F_i$  des polynômes à  $n$  variables se prolonge en une

connexion logarithmique sur  $\mathcal{O}(n)$  à pôles donnés par les  $F_i$ , pourvu qu'on ait  $\sum \deg(F_i)\theta_i = n$ , ainsi nous obtenons l'énoncé suivant.

**Proposition 1.6.4.** — *Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques sur le fibré  $\mathbb{P}(E)$  au dessus de  $\mathbb{P}^n$ , de lieu polaire  $D$ , alors il existe une connexion logarithmique  $\nabla$  sur  $E$ , de lieu polaire contenu dans  $D$ , telle que  $\mathbb{P}(\nabla) = \mathcal{R}$ .*

### 1.7. Riemann-Hilbert, extensions

On peut étendre la correspondance de Riemann-Hilbert pour les feuilletages de Riccati au dessus de surfaces sans hypothèse de croisement normaux. Ceci repose sur le lemme suivant.

**Lemme 1.7.1 (Loray-Pereira).** — *Si  $\tilde{\pi} : \tilde{P} \rightarrow \tilde{X}$  est un  $\mathbb{P}^1$ -fibré au dessus d'une surface projective  $\tilde{X}$  et  $\tilde{X} \rightarrow X$  est un morphisme birationnel, de diviseur exceptionnel  $D \subset \tilde{X}$ . Alors il existe un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P \rightarrow X$  et une application  $\Phi : \tilde{P} \rightarrow P$  tel que  $\Phi|_{\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{X} \setminus D)}$  soit un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Voir [LP07] □

**Théorème 1.7.2 (Deligne / Loray-Pereira).** — *Soit  $X$  une surface projective et  $D$  un diviseur réduit sur  $X$ . Si  $\rho : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  se relève à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , alors  $\rho$  est la représentation de monodromie d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  au dessus de  $X$  à pôles logarithmiques.*

*Démonstration.* — On procède à une suite d'éclatements  $\Phi : (\tilde{X}, \tilde{D}) \rightarrow (X, D)$  pour obtenir  $(\tilde{X}, \tilde{D})$  avec  $\tilde{D}$  à croisement normaux. La représentation  $\tilde{\rho} = \rho \circ \Phi_*$  se relève en  $\hat{\rho}$  à  $\mathrm{SL}_2$ , on peut produire, par le théorème 1.3.4 de Deligne, une connexion au dessus de  $\tilde{X}$  avec lieu polaire  $\tilde{D}$  de monodromie  $\hat{\rho}$ . Après projectivisation, on en déduit un feuilletage de Riccati  $\tilde{\mathcal{R}}$  au dessus de  $\tilde{X}$  de monodromie  $\tilde{\rho}$ . Le feuilletage recherché est alors  $\mathcal{R} = \Phi_*(\tilde{\mathcal{R}})$ . □

**Théorème 1.7.3.** — *Soit  $X$  une surface projective et  $D$  un diviseur réduit sur  $X$ . Si  $\rho : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  se relève localement à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et son image ne contient aucun élément d'ordre 2, alors  $\rho$  est la représentation de monodromie d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  au dessus de  $X$  à pôles logarithmiques.*

*Démonstration.* — C'est la même preuve que ci-dessus en utilisant le théorème 1.3.5 au lieu du théorème 1.3.4. □

**Remarque 1.7.4.** — Ce dernier résultat se réduit au précédent si l'image de  $\rho$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  est discrète. En effet tout sous groupe discret de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  sans 2-torsion se relève à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , d'après Culler [Cul86].

On a un résultat similaire avec des hypothèses un peu différentes, dans le cas  $X = \mathbb{P}^2$ , grâce au résultat que voici.

**Proposition 1.7.5.** — Soit  $D$  un diviseur réduit de degré  $n$  sur  $\mathbb{P}^2$  qui ne contient pas la droite à l'infini  $\ell_\infty$  et  $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus D) \rightarrow \mathrm{PSL}_2$  une représentation. Soit  $A$  un point de  $\mathbb{P}^2 \setminus (D \cup \ell_\infty)$ . Soit  $\delta$  est une droite passant par  $A$  contenant  $n$  points distincts  $x_1, \dots, x_n$  de  $D$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des lacets simples dans  $\delta$  de point de base  $A$ , faisant le tour respectivement de  $x_1, \dots, x_n$ .

Si, pour  $i = 1 \dots n$ ,  $\rho(\alpha_i)$  n'est pas d'ordre 2, alors la représentation  $\rho_i$  se relève à  $\mathrm{SL}_2$ , où  $i_* : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (D \cup \ell_\infty)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus D)$  est le morphisme induit par l'inclusion.

Si, de plus  $D$  a une composante de degré impair, alors  $\rho$  se relève aussi à  $\mathrm{SL}_2$ .

*Démonstration.* — Quitte à renverser l'orientation des  $\alpha_i$  et à les conjuguer, on peut supposer que  $\alpha_\infty = \alpha_1 \cdots \alpha_n$  est un lacet simple faisant le tour de  $x_\infty = \ell_\infty \cap \delta$ . Le théorème de Lefschetz indique que  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  est un système de générateurs de  $H := \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (D \cup \ell_\infty))$ . On voit que si  $\alpha_k$  et  $\alpha_j$  font le tour de la même composante de  $D$ , alors  $\alpha_k = w_{k,j}((\alpha_i)) \alpha_j w_{k,j}((\alpha_i))^{-1}$  avec  $w_{k,j}((\alpha_i))$  un mot en les  $\alpha_i$ , on obtient ainsi des relations du groupe  $H$ . L'algorithme de Zariski-Van Kampen dit que seul un nombre fini de relations de ce type suffisent à donner une présentation de  $H$  :

$$H = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | \mathcal{R} \rangle .$$

où les relations de  $\mathcal{R}$  sont de la forme  $\alpha_i = w \alpha_{\sigma(i)} w^{-1}$  avec  $w = w((\alpha_i))$  un mot en les  $(\alpha_i)$  et  $\sigma$  la permutation induite par la tresse correspondant à la relation. Soit  $G$  le groupe engendré par les telles  $\sigma$ ,  $i$  et  $j$  sont sous la même orbite sous  $G$  si et seulement si  $x_i$  et  $x_j$  sont dans la même composante de  $D$ .

Les relations de  $\mathcal{R}$  se rangent par orbites sous  $G$  : on obtient une partition de l'ensemble des relations de tresses  $\mathcal{R} = \sqcup_{i_0 \in I} \{ \alpha_i = w_k \alpha_{i_k} w_k^{-1} | i \in G i_0, k \in K_i \}$ . Pour chaque  $i_0 \in I$ , pour chaque  $i \in G i_0$ , on peut ajouter une relation  $r_{i_0, i} : \alpha_{i_0} = w_{i, i_0}((\alpha_i)) \alpha_i w_{i, i_0}((\alpha_i))^{-1}$  à la présentation de  $H$  de façon redondante :

$$H = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | \mathcal{R}, (r_{i_0, i}) \rangle .$$

Utilisant ensuite les relations  $(r_{i_0, i})$ , on peut donner une nouvelle présentation du groupe en remplaçant les relations de  $\mathcal{R}$  par des relations de la forme

$\alpha_{i_0} = w\alpha_i w^{-1} : G = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | \mathcal{R}' \rangle$ , avec  $\mathcal{R}' = \sqcup_{i_0 \in I} \mathcal{R}_{i_0}$ ,

$$\mathcal{R}_{i_0} = \{\alpha_{i_0} = w'_k \alpha_{i_k} (w'_k)^{-1} | i \in Gi_0, k \in K_i\} \cup \{r_{i_0, i}, i \in Gi_0\}$$

et  $w'_k = w_{i, i_0} w_k$ .

Le noyau de  $i_*$ , qui est surjectif, est le groupe engendré par la classe de conjugaison de  $\alpha_\infty$  (voir [Shi]). Ainsi,

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus D) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | \mathcal{R}' \text{ et } \alpha_1 \cdots \alpha_n = 1 \rangle.$$

Choisissons maintenant, pour  $i = 1 \cdots n$ , un relevé  $A_i$  de  $\rho(\alpha_i)$  dans  $\mathrm{SL}_2$ . L'hypothèse sur l'ordre de  $\rho(\alpha_i)$  montre  $\mathrm{trace}(A_i) \neq 0$ . Comme  $\rho$  est une représentation de  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus D)$ , pour chaque relation  $\alpha_{i_0} = w((\alpha_i))\alpha_j w((\alpha_i))^{-1}$  de  $\mathcal{R}_{i_0}$ , on a,  $A_{i_0} = \pm w((A_i))A_j w((A_i))^{-1}$ . Sous cette hypothèse, comme aucun des  $A_i$  n'a trace nulle,  $A_{i_0} = w((A_i))A_j w((A_i))^{-1}$  équivaut à  $\mathrm{trace}(A_{i_0}) = \mathrm{trace}(A_j)$ , ce qu'on peut obtenir en changeant le signe de  $A_j$  si toutefois  $\mathrm{trace}(A_{i_0}) = -\mathrm{trace}(A_j)$ . Les matrices  $A_i$  ainsi choisies définissent une représentation de  $H$  puisqu'elles satisfont l'ensemble de relations  $\mathcal{R}'$  et cette représentation relève  $\rho i_*$  par construction. La seule obstruction à obtenir de cette façon une représentation de  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus D)$  est alors le signe de  $A_1 \cdots A_n = \pm 1$ . Si  $A_1 \cdots A_n = -1$  et  $D$  a une composante de degré impair, alors il existe une orbite  $Gi_0$  de cardinal impair, en changeant le signe de  $A_i$  pour  $i \in Gi_0$ , on préserve les relations  $\mathcal{R}'$  en gagnant  $A_1 \cdots A_n = 1$ , on obtient donc un relèvement de  $\rho$ . □

**Corollaire 1.7.6.** — Soient  $D$  un diviseur réduit sur  $\mathbb{P}^2$  dont une composante est de degré impair. Soit  $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus D) \rightarrow \mathrm{PSL}_2$ . Si pour tout lacet simple fermé  $\alpha$  faisant le tour d'une composante de  $D$ ,  $\rho(\alpha)$  n'est pas d'ordre 2, alors  $\rho$  est la représentation de monodromie d'un feuilletage de Riccati au dessus de  $\mathbb{P}^2$  de lieu polaire contenu dans  $D$ .

*Démonstration.* — On applique le lemme ci-dessus, puis le théorème 1.7.2. □

**Remarque 1.7.7.** — On a encore une variante de ce corollaire avec  $D$  sans composante de degré impair, quitte à accepter une droite de pôle supplémentaire.

**Remarque 1.7.8.** — Dans les théorèmes 1.7.2 et 1.7.3 et dans le corollaire 1.7.6, les transformations élémentaires permettent de prescrire les exposants associés aux différentes composantes du lieu polaire (pourvu qu'ils sont compatibles avec les monodromies locales).

### 1.8. Cas abélien

Grâce aux modèles locaux abéliens donnés précédemment on peut réaliser toute représentation abélienne. On va montrer qu'on peut identifier précisément le fibré associé à une telle représentation.

On fixe une carte affine  $A \simeq \mathbb{C}^n$  de  $\mathbb{P}^n$ . Soit  $D$  un diviseur réduit de  $\mathbb{P}^2$  qui ne contient pas la droite à l'infini  $\ell_\infty$ . Soit  $F = \prod_i F_i$  une équation réduite de  $D$  sur  $A$ . Soit  $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus D) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  une représentation abélienne.

Si l'image de  $\rho$  est conjuguée à un sous groupe de  $\mathbb{C}^*$ , alors on a vu que, pour  $(\theta_i)$  bien choisis, le feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  donné sur le fibré trivial  $P = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$  décrit au dessus de  $A$  par  $dz = \left( \sum \theta_i \frac{dF_i}{F_i} \right) \cdot z$ , a la représentation  $\rho$  comme monodromie. L'inconvénient de ce feuilletage de Riccati est qu'il possède un pôle apparent d'exposant  $-n = -\sum \deg(F_i)\theta_i$  sur la droite à l'infini (théorème des résidus). Soit  $S_\infty$  la section de  $P|_{\ell_\infty}$  donnée par  $z = \infty$  et  $S_0$  celle donnée par  $z = 0$ . Si  $n > 0$  (resp  $n < 0$ ), par  $n$  transformations élémentaires successives centrées en  $S_\infty$  (resp en  $S_0$ ) et ses transformées strictes, on chasse ce pôle apparent et obtient un feuilletage de Riccati  $\tilde{\mathcal{R}}$  sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\tilde{P}$ . D'autre part, la transformée stricte  $\sigma_0$  (resp.  $\sigma_\infty$ ) de la section  $z = 0$  (resp.  $z = \infty$ ) de  $P$  est une section holomorphe de  $\tilde{P}$ , le fibré  $\tilde{P}$  est donc le projectivisé d'un fibré de rang 2 scindé, d'après la proposition 1.4.4. De plus, on voit facilement que l'autointersection de  $\sigma_0|_\delta$  (resp.  $\sigma_\infty|_\delta$ ) dans  $\tilde{P}|_\delta$  est  $-|n|$ , ainsi  $\tilde{P} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$ .

Maintenant si l'image de  $\rho$  est conjuguée à un sous groupe de  $\mathbb{C}$ , alors on a vu que

$$dz = \left( \sum_k n_k \frac{dF_k}{F_k} \right) z + \prod_j F_j^{n_j} \sum_k c_k \frac{dF_k}{F_k}.$$

définit sur le fibré trivial  $P$  un feuilletage de Riccati qui a une monodromie conjuguée à  $\rho$ , pourvu que les  $c_k$  sont bien choisis. De même que précédemment, le feuilletage ainsi défini a un pôle apparent d'exposant  $-n = -\sum \deg(F_i)n_i$  et on a un encore, après transformation élémentaire, le fibré  $\tilde{P} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$ .

On a ainsi obtenu ce qui suit.

**Proposition 1.8.1.** — *Soit  $D$  un diviseur réduit sur  $\mathbb{P}^n$ , et  $D_i$  ses composantes irréductibles. Soient  $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus D) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  une représentation abélienne et  $(\theta_i)$  des exposants pour les  $D_i$  compatibles avec  $\rho$ . Soit  $-n = \sum \deg(D_i)\theta_i$ . Alors il existe un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  logarithmique sur  $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$  de monodromie  $\rho$  et dont les exposants associés aux  $D_i$  sont les  $\theta_i$ .*



**Corollaire 1.8.2.** — *Avec les mêmes hypothèses et notations, avec  $\rho$  sans pôle apparent et, pour tout  $i$ ,  $\theta_i \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{R}$  est l'unique feuilletage de Riccati compatible aux  $\theta_i$  et à  $\rho$ , modulo transformation biholomorphe de fibré.*

*Démonstration.* — On applique le lemme 1.3.2. □

### 1.9. Cas réductible

On peut décider algorithmiquement si une équation de Riccati au dessus de  $\mathbb{P}^2$  a monodromie réductible, ou de façon équivalente si il existe une solution globale pour cette équation. L'outil majeur d'un tel algorithme est la formule de Camacho-Sad. On décrit brièvement les idées d'un algorithme qui permet de décider l'irréductibilité (de la monodromie) d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une droite  $\delta = \mathbb{P}^1$ . C'est un avatar de l'algorithme de Kovacic [Kov86]. En appliquant cet algorithme à la restriction d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  au dessus de  $\mathbb{P}^2$  à une droite  $\delta \subset \mathbb{P}^2$  transverse à son diviseur de pôle, on pourra encore savoir si la monodromie de  $\mathcal{R}$  est irréductible, en vertu du théorème de Lefschetz.

**Remarque 1.9.1.** — Un feuilletage de Riccati à pôles simples sur le fibré trivial est donné par une équation différentielle du type  $dz = \sum_i \frac{P_i(z)}{x-i} dx$  avec  $P_i \in \mathbb{C}_2[z]$ . On peut supposer qu'aucune singularité n'est sur  $z = \infty$ . Les singularités  $(x, z)$  du feuilletages sont alors données par  $x = i$  et  $z = \text{zéro de } P_i$ . Si  $z_0$  est un zéro commun de tous les  $P_i$ , il est clair que la section  $z = z_0$  est invariante par notre feuilletage. On en tire : "Si  $n - 1$  singularités d'un feuilletage de Riccati à  $n$  pôles simples sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  sont sur la section  $z = z_0$  alors cette section est invariante par le feuilletage."

Soit donc  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati à  $n$  pôles simples sur  $\pi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Si une section  $\sigma$  de  $\pi$  est invariante par  $\mathcal{R}$ , elle traverse une singularité de chaque fibre invariante (cf modèles locaux, dans le cas d'une fibre à monodromie parabolique il n'y a qu'une singularité où passe une section locale invariante). L'autointersection de  $\sigma$  est donc donnée par

$$2n = \sigma^2 = \sum_{f \text{ fibre invariante}} \epsilon_f \theta_f,$$

où  $\theta_f$  est un de indices associés à  $f$  et  $\epsilon_f \in \{1, -1\}$ . Si  $\sigma^2 = 0$ , c'est que  $\sigma$  est une section constante. Si  $\sigma^2 > 0$ , de deux choses l'une : si  $n$  des singularités sont sur la même section constante  $\{z = z_0\}$ , alors cette section est invariante par la remarque 1.9.1 ; sinon par la composée de deux transformations élémentaires,

on peut faire chuter l'autointersection de  $\sigma$  de 2 en restant sur le fibré trivial. En effet, comme  $\sigma^2 > 0$ ,  $\sigma$  n'est pas constante et passe par deux singularités  $s_i = (x_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2$  de hauteurs différentes  $z_1 \neq z_2$ . En faisant, successivement une transformation élémentaire centrée en  $s_1$  puis une en  $s_2$ , on ne produit pas de section négative, donc on reste sur le fibré trivial, et comme on a fait deux transformations élémentaires centrées en des points de  $\sigma$  son autointersection a diminué de 2 :  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 - 2$ . En itérant ce procédé, on peut transformer, par équivalence de jauge birationnelle, notre feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  en un feuilletage de Riccati sur le fibré trivial ayant une section invariante constante.

Ainsi, pour détecter la présence d'une section invariante par  $\mathcal{R}$ , il suffit de voir quels sont les familles  $(\epsilon_f)$  tels que  $\sum_f \epsilon_f \theta_f$  est un entier pair positif et de faire des transformations élémentaires centrées (deux par deux) en les singularités correspondant aux indices  $\epsilon_f \theta_f$ , comme ci-dessus, de sorte que si il y a une section invariante qui passe par ces singularités, on la transforme en une section constante, ou bien on en trouve une autre. Si on ne peut obtenir de cette manière, une section constante invariante, c'est qu'il n'y a pas de section invariante pour  $\mathcal{R}$ , et donc que sa monodromie est irréductible.

Cet algorithme permet de plus d'obtenir un modèle sur le fibré trivial avec section invariante en  $z = \infty$ , le cas échéant ; sans rajouter de pôle.

On peut majorer grossièrement son coût en nombre de paires de transformations élémentaires par  $2^n \sum_{i=1}^n |\theta_i|$ , où  $n$  est le nombre de pôles de l'équation de Riccati initiale.

### 1.10. Feuilletages de Riccati pull-back par une application vers une courbe

**Définition 1.10.1.** — Soit  $P \rightarrow X$  et  $P' \rightarrow Y$  deux  $\mathbb{P}^1$ -fibrés, au dessus de variétés complexes lisses. On dit qu'une application méromorphe  $\phi : P \dashrightarrow P'$  est un morphisme méromorphe de  $\mathbb{P}^1$ -fibrés, si il existe  $h : X \dashrightarrow Y$  telle que dans les trivialisations locales de  $P$  et  $P'$ ,  $\phi$  s'écrit  $(x, z) \mapsto (h(x), A(x) \cdot z)$ , avec  $A : U \dashrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ .

On s'intéresse à la propriété suivante.

**Définition 1.10.2.** — Soit  $X$  une variété projective lisse. Soit  $(P, \mathcal{R})$  un  $\mathbb{P}^1$ -fibré sur  $X$  muni d'un feuilletage de Riccati. On dit que  $\mathcal{R}$  est *pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe* si il existe une courbe projective lisse  $\mathcal{C}$ , un  $\mathbb{P}^1$  fibré  $P_0$  sur  $\mathcal{C}$  muni d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}_0$  et un morphisme méromorphe de fibrés  $H : P \dashrightarrow P_0$  tel que  $\mathcal{R} = H^* \mathcal{R}_0$ .

Une propriété voisine est la suivante.

**Définition 1.10.3.** — Soit  $X$  une variété projective lisse. Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati sur  $\mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X$ . On dit que  $\mathcal{R}$  est *pull-back strict* d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe si il existe une courbe projective lisse  $\mathcal{C}$ , un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}_0$  sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et une application méromorphe  $f : X \dashrightarrow \mathcal{C}$  telle que  $\mathcal{R} = f^*\mathcal{R}_0$ . (C'est la propriété précédente avec  $H$  induite par  $f$ ).

**Proposition 1.10.4.** — Soit  $(P, \mathcal{R})$  un  $\mathbb{P}^1$ -fibré sur  $\mathbb{P}^n$  muni d'un feuilletage de Riccati. Si  $\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe, alors  $\mathcal{R}$  est birationnellement équivalent à un pull-back strict de feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.

*Démonstration.* — Soient  $\mathcal{C}$  et  $H : P \dashrightarrow P_0$  comme dans la définition 1.10.2. Quitte à faire une transformation birationnelle de  $P$ , on peut supposer que  $P$  est le fibré trivial, puisque  $P$  est un projectivisé de fibré de rang 2 ; voir section 1.4. Si  $\mathcal{R}$  est le feuilletage trivial, le résultat est évident, sinon  $H$  est une application rationnelle dominante et  $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ . Alors, quitte à faire une transformation birationnelle de  $P_0$ , on peut aussi supposer que  $P_0$  est le fibré trivial sur  $\mathbb{P}^1$ . Dans ces conditions,  $H$  est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{P}^1 \times X &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ (z, x) &\longmapsto (A(x).z, f(x)) \end{aligned}$$

avec  $A : X \dashrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Si  $\Psi : \mathbb{P}^1 \times X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times X$  est définie par  $(z, x) \mapsto (A(x).z, x)$ , on voit que  $\Psi$  donne une équivalence birationnelle entre  $f^*\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}$ .  $\square$

**Lemme 1.10.5.** — Soit  $\mathcal{C}$  une courbe complexe projective lisse. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur une variété lisse  $M$  satisfaisant  $\mathcal{F} = H^*\mathcal{R}_0$  pour  $\mathcal{R}_0$  un feuilletage de Riccati sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi : X \rightarrow \mathcal{C}$  et  $H : M \dashrightarrow X$  est une application méromorphe. Alors  $\mathcal{F}$  est un feuilletage transversalement projectif dont une structure transverse est donnée par un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}_1$  pull-back strict d'un feuilletage de Riccati au dessus de  $\mathcal{C}$  et une section bien choisie.

*Démonstration.* — Quitte à faire une modification birationnelle de  $X$ , on peut supposer que  $\pi$  est le fibré trivial  $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . On tire en arrière ce dernier fibré par  $\pi \circ H$ . On obtient un diagramme commutatif comme suit.

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \\
p \downarrow & & \downarrow \pi \\
M & \xrightarrow[\pi \circ H]{} & \mathcal{C}
\end{array}$$

On fixe  $\mathcal{R}_1 = \varphi^*\mathcal{R}_0$  et on définit une section  $\sigma$  de  $p$  par  $\varphi.\sigma(x) = H(x)$ . On obtient alors, par commutativité du diagramme,  $\sigma^*\mathcal{R}_1 = \sigma^*\varphi^*\mathcal{R}_0 = H^*\mathcal{R}_0 = \mathcal{F}$ . Ainsi,  $(p, \mathcal{R}_1, \sigma)$  donne une structure transversalement projective pour  $\mathcal{F}$ .  $\square$

On a une réciproque à cela.

**Lemme 1.10.6.** — Soit  $\mathcal{R}_0$  un feuilletage de Riccati sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi : X \rightarrow \mathcal{C}$ .

Soit  $Y \rightarrow M$  un  $\mathbb{P}^1$ -fibré, soit  $\psi : Y \dashrightarrow X$  un morphisme méromorphe de  $\mathbb{P}^1$ -fibrés. Soit  $\mathcal{R}_1 = \psi^*\mathcal{R}_0$ .

Alors, pour toute section  $\sigma$  de  $p$  génériquement transverse à  $\mathcal{R}_1$ , le feuilletage  $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{R}_1$  satisfait  $\mathcal{F} = H^*\mathcal{R}_0$ , pour une certaine application méromorphe  $H : M \dashrightarrow X$ .

*Démonstration.* — On pose  $H = \psi \circ \sigma$ . On obtient  $H^*\mathcal{R}_0 = \sigma^*\psi^*\mathcal{R}_0 = \sigma^*\mathcal{R}_1 = \mathcal{F}$ .  $\square$

Considérons la situation où l'on a :

- un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur un fibré  $\pi$  au dessus d'une variété  $X$ .
- un revêtement  $p : Y \rightarrow X$ .
- le feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}_1 = p^*\mathcal{R}$  sur  $p^*\pi$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}_0$  au dessus d'une courbe.

**Question.** — Que peut-on alors dire sur le feuilletage initial  $\mathcal{R}$  ? Est-il lui aussi pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe ?

**Remarque 1.10.7.** — Quand on parle d'une fibre d'une application rationnelle, on fait référence à une fibre de l'application holomorphe qu'elle définit hors de son lieu polaire.

**Proposition 1.10.8.** — Soit  $X$  une variété projective lisse,  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati sur le  $\mathbb{P}^1$ -fibré trivial  $P_X$  au dessus de  $X$ . Soit  $\pi : Y \rightarrow X$  un revêtement ramifié galoisien avec  $Y$  projective lisse. Soit  $(P_Y, \mathcal{R}_1) = \pi^*(P_X, \mathcal{R})$ . Soit  $\mathcal{C}$  une courbe projective lisse et  $P_{\mathcal{C}}$  le  $\mathbb{P}^1$  fibré trivial au dessus de  $\mathcal{C}$ .

Soient  $H : P_Y \dashrightarrow P_C$  un morphisme rationnel de fibrés et  $\mathcal{R}_0$  un feuilletage de Riccati sur  $P_C$  de monodromie non virtuellement abélienne et tel que  $H^*\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1$ . Soit  $H_{hol}$  la restriction de  $H$  à son lieu d'holomorphie.

Si  $dH_{hol}$  est partout de rang maximal et  $H_{hol}$  est surjective à fibres connexes, alors  $\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.

*Démonstration.* — Soit  $G$  le groupe des automorphismes de  $\pi$ , on a  $P_X = P_Y/G$ ; où l'action de  $G$  sur  $P_Y$  est définie par  $g(z, y) = (z, gy)$ . Soit  $h : Y \rightarrow \mathcal{C}$  l'application induite par  $H$ . Soit  $g \in G$ , soit  $F$  une fibre de  $h$  (elle est connexe). Le groupe de monodromie de  $\mathcal{R}_{1|F}$  est trivial et il doit en être de même pour  $\mathcal{R}_{1|gF}$ , ainsi  $gF$  est une fibre de  $h$ , puisque toute courbe fermée  $\mathcal{C}' \subset Y$  génériquement transverse à  $h$  donne, via  $h$ , un revêtement fini de  $\mathcal{C}$ , de sorte que le groupe de monodromie  $\mathcal{R}_{1|\mathcal{C}'}$  soit d'indice fini dans celui de  $\mathcal{R}_0$ .

De cette façon,  $G$  agit sur  $\mathcal{C}$  par transformations holomorphes : si  $g \in G, y \in Y$ , alors  $h(gy) = gh(y)$  (l'holomorphie vient de l'existence de sections locales de  $h_{hol}$ ). De plus, si  $g \in G$ , comme  $g$  réalise un automorphisme de  $\mathcal{R}_1$ ,  $g$  envoie les feuilles de  $\mathcal{R}_{1|F}$  sur les feuilles de  $\mathcal{R}_{1|gF}$ . Ainsi, si  $f$  est une fibre de  $H$ , elle est une feuille de  $\mathcal{R}_{1|F}$  pour un certain  $F$  et elle est envoyée sur une fibre de  $H$ . On obtient ainsi une action holomorphe de  $G$  sur  $P_C$  définie par  $H(g(z, y)) = gH(z, y)$  (l'holomorphie s'obtient de la même manière que ci-dessus).

On note :

1.  $G$  agit sur  $P_C$  par automorphismes de  $\mathcal{R}_0$  ;
2. comme la monodromie de  $\mathcal{R}_0$  n'est pas virtuellement abélienne, tout élément de  $G$  qui agit trivialement sur  $\mathcal{C}$  agit trivialement sur  $P_C$ , d'après le lemme 1.10.12 ;
3. ainsi tout élément  $g \in G$  qui agit non trivialement sur  $P_C$  a un ensemble de points fixes fini pour son action sur  $\mathcal{C}$ .

Soient  $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/G$ ,  $\tilde{P} = P_C/G$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_0 = \mathcal{R}_0/G$ . On déduit de  $P_C \rightarrow \mathcal{C}$ , une fibration rationnelle  $\tilde{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$  de fibre générique transverse à  $\tilde{\mathcal{R}}_0$ . Quitte à désingulariser  $\tilde{P}$ , c'est une surface lisse, ce que nous supposons dans la suite. Ainsi  $\tilde{\mathcal{R}}_0$  est un feuilletage de Riccati (au sens de Brunella [Bru00], un peu différent du notre), de fibration adaptée  $\tilde{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ . D'après [Bru00, Prop. 2 p 56], après une transformation birationnelle de  $\tilde{P}$ , on peut de plus supposer que  $\tilde{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$  est un  $\mathbb{P}^1$ -fibré. Soit  $q : P_C \dashrightarrow \tilde{P}$ , l'application de projection sur le quotient.

L'application  $q \circ H = \hat{H} : P_Y \dashrightarrow \tilde{P}$  est un morphisme rationnel de fibrés invariant par l'action de  $G$  sur  $P_Y$ . Par construction, on a  $\mathcal{R}_1 = \hat{H}^* \tilde{\mathcal{R}}_0$ . Finalement, on voit que  $\hat{H}$  se factorise par  $\pi$ , puisqu'elle est invariante par  $G$ . On obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} (P_Y, \mathcal{R}_1) & \xrightarrow{H} & (P_{\mathcal{C}}, \mathcal{R}_0) \\ \pi \downarrow & & \downarrow q \\ (P_X, \mathcal{R}) & \xrightarrow{\tilde{H}} & (\tilde{P}, \tilde{\mathcal{R}}_0) \end{array}$$

L'application rationnelle  $\tilde{H}$  est injective en restriction à la fibre générique de  $P_X$ , par le point 3. ci-dessus, c'est donc un morphisme rationnel de  $\mathbb{P}^1$ -fibrés et on en déduit le résultat.  $\square$

**Remarque 1.10.9.** — La proposition précédente est un analogue dans le langage des feuilletages du lemme [CS08, Lemma 3.6 p 1982].

L'exemple suivant montre que des hypothèses sur la monodromie sont nécessaires, c'est le point 3. de la preuve précédente qui est mis en défaut.

**Exemple 1.10.10.** — Soit  $b(t) \in \mathbb{C}(t)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  on considère le feuilletage  $\mathcal{R} : dz = z(b(t)dt + \frac{dx}{nx})$  sur le fibré trivial au dessus de  $X = \mathbb{P}_t^1 \times \mathbb{P}_x^1$ . On le tire en arrière par le revêtement

$$\begin{aligned} p : Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow X \\ (t, y) &\longmapsto (t, y^n) \end{aligned}$$

On obtient le feuilletage  $\mathcal{R}_1 : dz = z(b(t)dt + \frac{dy}{y})$ , qui est pull-back du feuilletage  $dZ = Zb(T)dT$  sur le fibré trivial au dessus de  $\mathbb{P}_T^1$  par  $H(z, t, y) = \{(Z, T) = (z/y, t)\}$ . Les automorphismes du revêtement  $\pi$  agissent sur  $Y$  de la façon suivante : si  $g \in \text{Aut}(\pi)$  alors  $g : (t, y) \mapsto (t, \xi y)$  avec  $\xi^n = 1$ . l'action de  $g$  s'étend à  $\mathbb{P}_z^1 \times \mathbb{P}_t^1 \times \mathbb{P}_y^1$  par  $g(z, (t, y)) = (z, g(t, y))$ . Cette action permute les fibres de  $H$  et induit une action de  $\text{Aut}(\pi)$  sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  qui est définie par  $Hg = gH$  et qui induit un automorphisme de  $\mathcal{R}_0$ . Explicitement, on obtient  $g(Z, T) = (\xi^{-1}Z, T)$ . La projection sur le quotient de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  par cette action est donc

$$\begin{aligned} q : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ (Z, T) &\longmapsto (\tilde{Z}, T) = (Z^n, T) \end{aligned}$$

Le feuilletage  $\tilde{\mathcal{R}}_0 = q_* \mathcal{R}_0$  est alors défini par  $\frac{d\tilde{Z}}{\tilde{Z}} = n \frac{dZ}{Z} = nb(T)dT$ , c'est donc encore un feuilletage de Riccati. Par construction, Il existe alors  $\tilde{H} : \mathbb{P}^1 \times X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  telle que  $q \circ H = \tilde{H} \circ p$  et  $\mathcal{R} = \tilde{H}^* \tilde{\mathcal{R}}_0$ . On voit que  $\tilde{H}$  est donnée par

$(z, t, x) \mapsto (z^n/x, t)$ . En particulier,  $\tilde{H}$  ne définit pas une situation de pull-back comme dans la définition 1.10.2 puisque l'application rationnelle  $\tilde{H}$ , n'est pas injective en restriction à la fibre générique de  $\mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X$ .

On souhaite montrer le résultat suivant.

**Théorème 1.10.11.** — *Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques au dessus de  $\mathbb{P}^2$  et  $D$  son lieu polaire. Si la monodromie de  $\mathcal{R}$  n'est pas virtuellement abélienne et si  $D$  a un point de multiplicité  $m \geq \deg(D) - 2$  alors  $\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.*

Pour en faire la preuve, nous aurons besoin de la proposition 1.10.8 et des résultats qui suivent.

**Lemme 1.10.12.** — *Soient  $G = \langle (g_i)_{i=1 \dots n} \rangle$  un sous-groupe de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  finiment engendré et  $A \neq 1$  un élément de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Si tout élément de  $G$  commute à  $A$ , alors  $G$  est virtuellement abélien. Si, de plus, pour tout  $i$ ,  $g_i^2 \neq 1$ , alors  $G$  est abélien.*

*Démonstration.* — On interprète les éléments de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  comme automorphismes de la sphère de Riemann.

- Si  $A$  est parabolique, tout élément de  $\mathrm{PSL}_2$  qui lui commute est parabolique de même point fixe, donc  $G$  est un groupe de translations de  $\mathbb{C}$ , donc est abélien.
- Si  $A$  n'est pas parabolique, alors  $A$  a deux points fixe et si  $B \in \mathrm{PSL}_2$  lui commute, alors, ou bien  $B$  a les mêmes points fixes ou bien quitte à conjuguer simultanément  $A$  et  $B$ ,  $A$  induit  $z \mapsto -z$  et  $B$  induit  $z \mapsto \beta/z$ , en particulier  $B$  est d'ordre 2. Soit  $H$  l'ensemble des éléments de  $G$  qui ont les mêmes points fixes que  $A$ , c'est un sous-groupe de  $G$ , dont on va montrer qu'il est d'indice fini. Quitte à choisir une bonne carte  $z$  sur la sphère et à renuméroter les  $g_i$ , on est dans la situation suivante :  $A$  induit  $z \mapsto \alpha z$ , pour  $i = 1 \dots k$ ,  $g_i = \psi_{\alpha_i} = z \mapsto \alpha_i z$  et pour  $i = k+1 \dots n$ ,  $g_i = \phi_{\beta_i} = z \mapsto \beta_i/z$ . En remarquant  $\phi_{\beta} \cdot \psi_{\alpha} = \psi_{1/\alpha} \cdot \phi_{\beta}$ , on voit que tout produit des  $g_i$  est un élément de  $H$  ou bien s'écrit comme produit d'un élément de  $H$  et d'un des  $z \mapsto \beta_i/z$ . Ainsi un système de représentants de  $G/H$  est donné par  $(g_i)_{i \in I}$  avec  $I \subset [k+1, n]$  donc  $I$  fini.

□

**Lemme 1.10.13.** — *Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux sous groupes de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  finiment engendrés. Si tout élément de  $G_1$  commute aux éléments de  $G_2$  et  $G = G_1 G_2$  n'est pas virtuellement abélien, alors  $G_1 = \{1\}$  ou  $G_2 = \{1\}$ .*

*Démonstration.* — Si  $G_1$  et  $G_2$  sont virtuellement abélien alors  $G$  aussi, ce qui est absurde. On peut donc supposer  $G_1$  non virtuellement abélien. Alors  $G_2$  doit être trivial par le lemme 1.10.12.  $\square$

**Proposition 1.10.14.** — *Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces topologiques connexes par arcs, de groupes fondamentaux finiment engendrés et  $\rho : \pi_1(X \times Y) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  est un morphisme de groupes d'image non virtuellement abélienne alors, quitte à échanger  $X$  et  $Y$ , la restriction de  $\rho$  à toute fibre de  $X \times Y \rightarrow Y$  est triviale.*

*Démonstration.* — On a  $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \cdot \pi_1(Y)$ , donc  $\rho(\pi_1(X \times Y)) = \rho(\pi_1(X))\rho(\pi_1(Y))$  et on conclut par le lemme 1.10.13.  $\square$

**Remarque 1.10.15.** — Pour conclure la preuve du théorème, on utilise une notion non introduite précédemment : celle de feuilletage de Riccati à pôles réguliers. On dira qu'un feuilletage de Riccati est à pôles réguliers si ses relèvements locaux en  $\mathrm{sl}_2$ -connexions sont à pôles réguliers au sens de Deligne [Del70].

1. Tout feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques est à pôles réguliers.
2. D'après [Del70, Théorème 4.1 pp 85-86] et des arguments similaires à ceux de la preuve de la proposition 1.4.9, deux feuilletages de Riccati à pôles réguliers qui ont même monodromie sont birationnellement conjugués.
3. De plus la propriété pour un feuilletage de Riccati d'être régulier est invariante par éclatement, c'est aussi un corollaire de [Del70, Théorème 4.1 pp 85-86].

**Proposition 1.10.16.** — *Soit  $X = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$  avec  $\mathcal{C}_i$  des courbes projectives lisses. Soit  $p_i : X \rightarrow \mathcal{C}_i$  la projection sur le  $i$ -ème facteur. Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati à pôles réguliers, de monodromie non-virtuellement abélienne sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P \rightarrow X$ . Si le lieu polaire non apparent de  $\mathcal{R}$  est de la forme  $D = D_1 \cup D_2$  avec  $D_i = \cup_{k \in d_i} \{p_i = k\}$ ; où  $d_i \subset \mathcal{C}_i$ . alors  $\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques au dessus d'une courbe.*

*Démonstration.* — On remarque  $X \setminus D = (\mathcal{C}_1 \setminus d_1) \times (\mathcal{C}_2 \setminus d_2)$  et voit qu'on peut appliquer la proposition 1.10.14 : on obtient que la représentation de monodromie de  $\mathcal{R}$

$$\rho : \pi_1(\mathcal{C}_1 \setminus d_1) \times \pi_1(\mathcal{C}_2 \setminus d_2) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$



est triviale sur l'un des facteurs, disons le second. Soit  $\mathcal{C}$  une fibre générique de  $p_1$ . Soit  $(P_0, \mathcal{R}_0) = (P, \mathcal{R})|_{\mathcal{C}}$ . Soit  $\phi : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}$  l'isomorphisme induit par  $p_2$ . On voit que le feuilletage  $(\phi \circ p_2)^*(P_0, \mathcal{R}_0)$  a la même monodromie que  $\mathcal{R}$ . Par le point 2. de la remarque précédente, ces deux feuilletages sont birationnellement équivalents, ce qui conclut la preuve, vu que la monodromie de  $\mathcal{R}_0$  peut être réalisée par un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques.  $\square$

*Preuve du théorème 1.10.11.* — Soit  $\pi$  le fibré associé à  $\mathcal{R}$ , quitte à faire une transformation birationnelle, on peut supposer que c'est le fibré trivial. Soit  $A$  un point de multiplicité  $m \geq \deg(D) - 2$  et  $k = \deg(D) - m + 1$ , on a  $k \leq 3$ . Soit  $w : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en  $A$ . La transformée totale  $D_1$  de  $D$  est la réunion d'une  $k$ -section et de fibres de  $\Sigma_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Par une transformation élémentaire  $v$  du  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\Sigma_1$ , on le transforme en le fibré trivial  $p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}_a^1 \rightarrow \mathbb{P}_b^1$ . Le diviseur  $D_2 = v^*D_1$  est encore réunion d'une  $k$ -section et de fibres. Pour un revêtement ramifié galoisien fini  $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_a^1$  bien choisi, on a un fibré en  $\mathbb{P}^1$ ,  $f^*p : \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$  tel que  $D_3 = u^*D_2$  soit la réunion de fibres et de  $k$  sections. Quitte à faire encore une transformation de jauge birationnelle  $T$  de  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $D_4 = T^*D_3$  est réunion de fibres et de  $k$  sections *disjointes*. Tirant en arrière  $(\pi, \mathcal{R})$  par  $T \circ u \circ v \circ w$ , on définit  $(\tilde{\pi}, \tilde{\mathcal{R}})$  avec un lieu polaire non apparent très particulier :  $k$  sections disjointes et un nombre fini de fibres  $(F_j)_{j \in J}$  de  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ .

De plus,  $\tilde{\mathcal{R}}$  est à pôles réguliers, puisque cette propriété est invariante par éclatements, et sa monodromie est non virtuellement abélienne comme celle de  $\mathcal{R}$ . Ainsi, par la proposition 1.10.16,  $\tilde{\mathcal{R}}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe. Comme  $\tilde{\pi}$  est trivial, l'application de pull-back est de la forme  $(z, x) \mapsto (A(x) \cdot z, f(x))$  avec  $A$  et  $f$  rationnelles. On peut donc en déduire une application du même type pour  $(u \circ v \circ w)^*(\pi, \mathcal{R})$ . On peut alors appliquer la proposition 1.10.8 à  $(u \circ v \circ w)^*(\pi, \mathcal{R})$  pour en déduire que  $(v \circ w)^*\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe, ce qui permet de conclure.  $\square$

## CHAPITRE 2

### ÉQUATION DE PAINLEVÉ VI

Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques sur  $P \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Soit  $D$  son lieu polaire, et  $A \in \mathbb{P}^2$ . On va décrire un procédé qui montre que  $\mathcal{R}$  se déduit d'une déformation isomonodromique à un paramètre.

- Étape 1 : on fixe une transformation birationnelle  $T : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ .
- Étape 2 : on tire en arrière le fibré et le feuilletage au dessus de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .
- Étape 3 : le support de  $D' = T^*D$  est la réunion d'une multisection  $y = \sigma(x)$  du fibré  $p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  donné par la projection sur le premier facteur  $(x, y) \rightarrow x$ , et de fibres de  $p$ . En tirant en arrière le feuilletage de Riccati et son fibré par un revêtement ramifié galoisien bien choisi  $(y, x) = (y, r(\tilde{x}))$ , on obtient un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\tilde{P}$  et un feuilletage de Riccati  $\tilde{\mathcal{R}}$  au dessus de  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ , dont le lieu lieu polaire est la réunion de fibres de  $(\tilde{x}, y) \mapsto \tilde{x}$  et de sections  $y = \sigma_i(\tilde{x})$ .

D'après un résultat de semi-continuité de la thèse de Viktoria Heu [Heu09], il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel qu'il existe un ouvert de Zariski non vide  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{C}$  tel que pour  $\tilde{x}_0 \in \mathcal{U}$ ,  $\tilde{P}|_{\tilde{x}=\tilde{x}_0} = \mathbb{F}_k$ , est la  $k$ -ième surface de Hirzebruch et la section négative correspondante est la restriction de la même section globale holomorphe  $f$  de  $\tilde{E}|_{\mathcal{U}}$ .

Ainsi, par transformations élémentaires, comme dans la preuve de Lins Neto [LN87, Theorem 3], on obtient un couple  $(\hat{P}, \hat{R})$  birationnellement équivalent à  $(\tilde{P}, \tilde{R})$ , tel que  $\hat{P}|_{\tilde{x}=\tilde{x}_0}$  est trivial pour  $\tilde{x}_0 \in \mathcal{C}$  générique. Alors par Fischer-Grauert [FG65], le fibré est trivialisable au voisinage de toute fibre générique  $F_{\tilde{x}_0} = \{\tilde{x} = \tilde{x}_0\}$ .

Dans le cas où il n'y a que quatre sections de pôles  $(\sigma_i)_{i=1\dots 4}$ , fixons  $\Sigma$  une section de singularité du feuilletage au dessus de  $\sigma_4$ . Pour  $\tilde{x}$  générique, la position au dessus de  $F_{\tilde{x}}$  du lieu de tangence entre  $\mathcal{R}_x$  et la section constante sur  $F_{\tilde{x}}$  (notion bien définie puisque le fibré est trivial) qui passe par  $\Sigma \cap$

$P|_{F_{\tilde{x}}}$  du feuilletage est donnée par une fonction méromorphe  $q(\tilde{x})$ . Soit  $t(\tilde{x}) = [\sigma_1(\tilde{x}), \sigma_2(\tilde{x}), \sigma_3(\tilde{x}), \sigma_4(\tilde{x})]$  le birapport des quatre sections de pôles. Comme le fibré est trivialisable au voisinage de toute  $F_{\tilde{x}}$  générique, le couple  $(q(\tilde{x}), t(\tilde{x}))$  est une solution de l'équation de Painlevé VI, ce par la théorie locale des déformations isomonodromiques (voir ci-dessous). Les solutions ainsi définies localement se recollent en une solution définie sur  $\mathcal{C}$  et fournissent ainsi une solution *algébrique* de l'équation de Painlevé VI.

L'équation de Painlevé VI de paramètres  $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty)$  est l'équation différentielle non linéaire du second ordre suivante, on la note  $(\text{PVI})_\theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t} \right) \frac{dq}{dt} \\ & + \frac{q(q-1)(q-t)}{2t^2(t-1)^2} \left( (\theta_\infty - 1)^2 - \theta_0^2 \frac{t}{q^2} + \theta_1^2 \frac{t-1}{(q-1)^2} + (1 - \theta_t^2) \frac{t(t-1)}{(q-t)^2} \right) \end{aligned}$$

Depuis Fuchs, les solutions de l'équation de Painlevé VI sont connues pour gouverner les déformations isomonodromiques d'équations linéaires scalaires d'ordre 2 à singularités régulières en quatre pôles mobiles :  $x = 0, 1, t, \infty$  : il y a une bijection entre les telles déformations (modulo transformation holomorphe de l'inconnue) et les solutions de l'équation de Painlevé VI  $(\text{PVI})$ .

Cela se transpose dans le langage des déformations d'équations de Riccati à quatre pôles. On précise ce que cela signifie dans ce contexte.

Soit  $t_0 \notin \{0, 1, \infty\}$ . Si  $\mathcal{R}$  est un feuilletage de Riccati sur

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{C}, t_0) &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{C}, t_0) \\ (z, x, t) &\longmapsto (x, t) \end{aligned}$$

à quatre pôles logarithmiques  $x = 0, 1, t, \infty$ , d'indices respectifs  $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty$ , alors il lui correspond une solution de  $(\text{PVI})_\theta$  définie sur  $(\mathbb{C}, t_0)$ . Réciproquement à chaque solution de  $(\text{PVI})_\theta$  définie sur  $(\mathbb{C}, t_0)$  correspond un feuilletage de Riccati sur  $\pi$  à quatre pôles logarithmiques  $x = 0, 1, t, \infty$  d'indices donnés par  $(\theta)$ , unique modulo transformation de jauge holomorphe.

Ceci se décrit par des formules rationnelles.

### 2.1. Formules donnant la déformation issue d'une solution

Si  $q(t), t \in \mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  est une solution de  $(\text{PVI})_\theta$ , on définit

$$p = \frac{1}{2} \left( \frac{t(t-1)}{q(q-1)(q-t)} \frac{dq}{dt} + \frac{\theta_0}{q} + \frac{\theta_1}{q-1} + \frac{\theta_t-1}{q-t} \right)$$

Soit  $\mathcal{R}$  le feuilletage de Riccati correspondant sur le  $\mathbb{P}^1$ -fibré trivial au dessus de  $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U}$ , l'indice de  $x = i$  est  $\theta_i$ . On peut associer à chaque section de singularité

un exposant  $+\theta$  ou  $-\theta$  en choisissant la valeur de l'indice de Camacho-Sad du feuilletage par rapport à la section invariante passant par cette singularité. Soient  $s_0$  la section de singularité associée à  $+\theta_0$  au dessus de  $x = 0$ ,  $s_1$  la section de singularité associée à  $+\theta_1$  au dessus de  $x = 1$  et  $s_\infty$  la section de singularité associée à  $+\theta_\infty$  au dessus de  $x = \infty$ .

Si, pour tout  $t \in \mathcal{U}$ ,  $s_0(t) \neq s_1(t) \neq s_\infty(t)$ , alors on peut normaliser  $\mathcal{R}$  en envoyant  $s_i$  sur  $\tilde{z} = i$  par une transformation de jauge holomorphe  $\tilde{z} = A(t).z$ . Alors  $\mathcal{R}_t$  est donné par une équation de la forme  $d\tilde{z} = R(\tilde{z}, x)dx = (\frac{P_0(\tilde{z})}{x} + \frac{P_1(\tilde{z})}{x-1} + \frac{P_t(\tilde{z})}{x-t})dx$ , avec  $P_i(\tilde{z}) \in \mathbb{C}_2[\tilde{z}]$  et  $\Delta(P_i) = \theta_i^2$ , où  $\Delta(a+bz+cz^2) = b^2-4ac$ . Si on pose  $P_\infty = -P_0 - P_1 - P_t$  et  $P_i = a_i + b_i z + c_i z^2$ , alors la normalisation que nous venons de faire impose  $c_\infty = a_0 = 0$  et  $P_1(1) = 0$ . Sous ces contraintes,  $R$  est caractérisé par :

- $R(\tilde{z}, q)$  est de degré 1 (les seuls points de tangence entre le feuilletage et  $z = \infty$  sont  $x = q$  et  $x = \infty$ ),
- le coefficient dominant de  $R(\tilde{z}, q)$  est  $-2p + \frac{\theta_0}{q} + \frac{\theta_1}{q-1} + \frac{\theta_t}{q-t}$ .

Le feuilletage  $\mathcal{R}$  est alors donné par  $d\tilde{z} = \alpha + \beta\tilde{z} + \gamma\tilde{z}^2$  où

$$\begin{aligned} \alpha = & \left( -\frac{(-\rho - \theta_0 - \theta_1 + qp + 1 - p)(-\theta_0 + 1 - \theta_1 - p - \theta_t + qp - \rho)t^2}{(-x+t)(-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp+pt)(-1+t)} \right. \\ & + \frac{(-\theta_0 + 1 - \theta_1 - p - \theta_t + qp - \rho)(q^2p - qp - \rho q + q - q\theta_0 - q\theta_t + \theta_t - q\theta_1)t}{(-x+t)(-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp+pt)(-1+t)} + \\ & \left. \frac{(-p - \theta_1 + qp)t + q\theta_0 - q^2p + qp - \theta_t + \rho q + q\theta_1 + 1 - \rho - q + q\theta_t - \theta_0}{(x-1)(-1+t)} \right) dx \\ & + \left( \frac{(-\rho - \theta_0 - \theta_1 + qp + 1 - p)(-\theta_0 + 1 - \theta_1 - p - \theta_t + qp - \rho)x^2}{(x-1)(xp-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp)(-x+t)} \right. \\ & - \frac{(-\theta_0 + 1 - \theta_1 - p - \theta_t + qp - \rho)(q^2p - qp - \rho q + q - q\theta_0 - q\theta_t + \theta_t - q\theta_1)x}{(x-1)(xp-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp)(-x+t)} \\ & + \frac{(-1+\theta_0+\rho+\theta_1)(-\theta_0+1-\theta_1-p-\theta_t+qp-\rho)px}{(xp-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp)(-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp+pt)} - \left. \frac{(q-1)(-\theta_0+1-\theta_1-p-\theta_t+qp-\rho)x}{(x-1)(-1+t)} \right) dt; \\ \beta = & \left( \frac{\theta_0}{x} + \frac{(2p+2\rho-2qp-2+2\theta_0+2\theta_1+\theta_t)t+2q+\theta_t-2qp-2\rho q+2q^2p-2q\theta_1-2q\theta_t-2q\theta_0}{(-1+t)(-x+t)} \right. \\ & + \frac{(2p-2qp+\theta_1)t-2q\theta_0+2\rho+\theta_1-2+2\theta_0+2q^2p-2q\theta_1-2qp-2\rho q+2q+2\theta_t-2q\theta_t)}{(x-1)(-1+t)} \Big) dx \\ & + \left( -\frac{q(1-\rho-\theta_0-\theta_1-\theta_t+qp)}{t} + \frac{p(\theta_1+\rho+\theta_0-1)}{-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp+pt} \right. \\ & + \left. \frac{(-2p-2\rho+2qp+2-2\theta_0-2\theta_1-\theta_t)x+2qp+2\rho q-2q^2p+2q\theta_1+2q\theta_t+2q\theta_0-2q-\theta_t}{(x-1)(-x+t)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(q-1)(-\theta_0+1-\theta_1-p-\theta_t+qp-\rho)x + (q-1)(-\theta_0+1-\theta_1-p-\theta_t+qp-\rho)}{(x-1)(-1+t)} dt; \\
\gamma &= \frac{(-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp+pt)(x-q)dx}{(x-t)x(x-1)} - \frac{(-q+t)(-1+\rho+\theta_0+\theta_1+\theta_t-qp+pt)dt}{(x-t)t(-1+t)}; \\
\rho &= 1 - \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1 + \theta_t + \theta_\infty).
\end{aligned}$$

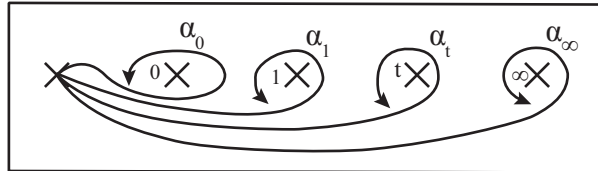
**Remarque 2.1.1.** — Pour éviter les problèmes de coquilles pour les éventuels utilisateurs de ces formules, on donnera ces dernières dans une feuille de calcul Maple sur la page web de l’auteur.

**Remarque 2.1.2.** — Soit  $t : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  un revêtement, ramifié au plus au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$ . Si  $q : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  est une fonction holomorphe on peut naturellement définir  $dq/dt$  et  $d^2q/d^2t$ . Si  $s \mapsto (q(s), t(s))$ ,  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  est une solution de l’équation de Painlevé VI en ce sens, alors on en tire une déformation isomonodromique paramétrée par  $\mathcal{C}$ , i.e. un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C}$ ,  $(z, x, s) \mapsto (x, s)$ . En effet, même si  $t(s_0) = 0, 1$  ou  $\infty$ , les formules ci-dessus permettent de prolonger  $\mathcal{R}$  à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C}$ , mais éventuellement avec un pôle  $s = s_0$  multiple. Dans cette situation, si  $\mathcal{C}$  est compacte, le couple  $(q, t)$  est appelé une solution algébrique de (PVI).

## 2.2. Solutions algébriques

Les solutions algébriques de l’équation de Painlevé VI décrivent des déformations isomonodromiques algébriques de feuilletages de Riccati  $\mathcal{R}_s$  à 4 pôles simples  $\{0, 1, t(s), \infty\}$  sur le fibré trivial. Chaque solution donne donc un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{P}_z^1 \times \mathcal{C}_s \times \mathbb{P}_x^1 \rightarrow \mathcal{C}_s \times \mathbb{P}_x^1$  avec des pôles logarithmiques en  $x = 0, 1, t(s), \infty$ , éventuellement des pôles verticaux  $s = s_1, \dots, s_m$  et aucun autre pôle. La déformation est  $\mathcal{R}_{s_0} = \mathcal{R}|_{s=s_0}$ . Fixons un point base et quatre lacets simples  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_t, \alpha_\infty$  tournant dans le sens direct respectivement autour de  $0, 1, t(s), \infty$  dans  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t(s), \infty\}$  et satisfaisant  $\alpha_\infty \alpha_t \alpha_1 \alpha_0 = 1$ , par exemple comme dans la figure 1. Soit  $s_0$  un point générique de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\rho$  la

FIGURE 1. Lacets



représentation de monodromie de  $\mathcal{R}_{s_0}$  et  $M_i = \rho(\alpha_i)$ . Soient  $t_i = \text{trace}(M_i)$  et  $t_{ij} = \text{trace}(M_i M_j)$ . Par Riemann-Hilbert, on caractérise  $\mathcal{R}_{s_0}$  biholomorphiquement par sa monodromie et ses exposants  $\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty$ . On a  $2\cos(\pi\theta_i) = t_i$ . Si la monodromie de  $\mathcal{R}_{s_0}$  est irréductible, elle est déterminée, à conjugaison près, par  $((t_i), (t_{ij}))$  et  $\mathcal{R}_{s_0}$  est donc caractérisé par la donnée de  $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty, \sigma_{01}, \sigma_{1t}, \sigma_{0t})$ , où  $\theta_i$  est déterminé au signe près, tandis que  $\sigma_{ij}$  est déterminé par  $2\cos(\pi\sigma_{ij}) = t_{ij}$  modulo changements de signes et translations entières (la trace n'est définie qu'au signe près).

En relevant les éléments de  $\pi_1(\mathbb{P}_t^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, t_0) \simeq F_2$  par  $s \mapsto t(s)$ , on définit des tresses qui donnent un morphisme surjectif  $F_2 \rightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)_{\text{pure}}$ . Le groupe  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)_{\text{pure}}$  agit naturellement sur  $\pi_1(\mathbb{S}_4^2)$  et donc, par pull-back sur les représentations de ce groupe. L'action induite sur les données de monodromie  $((t_i), (t_{ij}))$  est polynomiale à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , cf [Boa06, p 193]. Si la solution de (PVI) est algébrique, il n'y a qu'un nombre fini de  $s$  tels que  $t(s) = t_0$  et l'orbite  $F_2 \cdot ((t_i), (t_{ij}))$  est finie, en fait son cardinal est égal au degré de  $t$  si  $t : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  est le plus petit revêtement de  $\mathbb{P}^1$  sur lequel  $q$  est une fonction uniforme.

Connaître les  $F_2 \cdot ((t_i), (t_{ij}))$  finis où  $((t_i), (t_{ij}))$  définit une représentation irréductible de  $F_3$  avec  $2\cos(\pi\theta_i) = t_i$  aide donc à comprendre les solutions algébriques de l'équation de (PVI) $_\theta$  qui donnent des déformations à monodromies irréductibles. Les solutions algébriques de l'équations de Painlevé VI ont toutes été identifiées.

On va décrire les grandes lignes de ce travail pour les solutions algébriques qui décrivent des déformations de feuilletages de Riccati à monodromie irréductibles, qu'on appelle *solutions irréductibles* dans la suite.

Premièrement, un ensemble de solutions algébriques  $\Sigma$  a été découvert par Boalch, Dubrovin, Mazzocco, Hitchin, Kitaev et Vidunas. Ensuite, l'article [LT08] de Lisovyy-Tykhyy a montré que toute solution algébrique irréductible de Painlevé VI peut se déduire d'une des solutions de  $\Sigma$  au sens que nous précisons ci-dessous.

Kazuo Okamoto a défini un groupe qui agit sur les solutions de (PVI), appelé aujourd'hui le groupe d'Okamoto.

Ce groupe est l'image d'un groupe de Weil affine  $W_a(F_4)$  (cf [Boa06, section 3]) : chaque élément est caractérisé par son action sur les paramètres  $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty)$  des solutions. Décrivons brièvement l'action du groupe d'Okamoto sur les déformations isomonodromiques  $(\mathcal{R}_s)$  associées aux solutions de (PVI).

1. Les transformations qui n'agissent que par changement de signes des paramètres de la solution de (PVI) agissent trivialement sur  $(\mathcal{R}_s)$ .
2. Certaines agissent par des transformations de jauge méromorphes de  $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C}$  qui sont holomorphes en dehors des pôles  $0, 1, t, \infty$ .
3. Certaines agissent par permutations des pôles :  
 $< [0, 1, t, \infty] \mapsto [0, 1, 1-t, \infty], [0, 1, t, \infty] \mapsto [0, 1, 1/t, \infty] >.$
4. La symétrie spéciale  $s_\delta$  d'Okamoto a une action non triviale qui ne s'interprète pas géométriquement dans ce contexte.

Soit  $H$  le groupe engendré par les transformations des types 1–3 et  $G$  le groupe d'Okamoto, engendré par les transformations 1–4. Le groupe  $H$  agit par transformations birationnelles, ce qui ne change pas les propriétés géométriques de  $(\mathcal{R}_s)$  et des feuilletages induits par le choix de sections de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C}$ . Par contre, la transformation  $s_\delta$  perturbe ces propriétés : le groupe de monodromie de  $(\mathcal{R}_s)$  est en général modifié par  $s_\delta$  et la propriété de pull-back n'est pas respectée.

On déduit aisément de [Boa06, section 3] que  $H$  est d'indice 3 dans  $G$ .

Le travail de Lysovii-Tykhyy est le suivant :

Ils remarquent que l'action de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)_{pure}$  sur  $((t_i), (t_{ij}))$  fixe

$$\begin{cases} \omega_X = t_0 t_\infty + t_1 t_t, \\ \omega_Y = t_1 t_\infty + t_t t_0, \\ \omega_Z = t_t t_\infty + t_0 t_1 \\ \text{et } \omega_4 = t_0^2 + t_1^2 + t_t^2 + t_\infty^2 + t_0 t_1 t_t t_\infty. \end{cases}$$

Ainsi l'action de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)_{pure}$  sur  $(t_i), (t_{ij})$  induit une action sur les triplets  $(t_{01}, t_{0t}, t_{1t})$  de la cubique

$$t_{01} t_{0t} t_{1t} + t_{01}^2 + t_{0t}^2 + t_{1t}^2 - \omega_X t_{1t} - \omega_Y t_{0t} - \omega_Z t_{01} + \omega_4 = 4.$$

Chaque orbite finie pour l'action initiale donne une orbite finie sur une cubique.

À la machine, ils ont calculé les  $\omega = (\omega_X, \omega_Y, \omega_Z, \omega_4)$  donnant les cubiques qui portent des orbites finies.

Les paramètres  $(\theta_i)$  qui correspondent à un tel  $\omega$  sont dans la même orbite sous le groupe d'Okamoto. Ainsi deux solutions irréductibles de (PVI) qui donnent la même orbite sur une cubique sont dans la même orbite sous le groupe d'Okamoto  $G$ . Pour une discussion éclairée de ces propriétés et des références, on recommande [CL09].

L'étape finale du raisonnement de [LT08] consiste alors à remarquer que chaque orbite irréductible finie sur une cubique est réalisée par une solution de l'ensemble  $\Sigma$ . Ainsi, toutes les solutions algébriques sont des conjuguées d'Okamoto des solutions connues.

De cette façon, si l'on omet les solutions de Picard qui sont d'un type bien particulier, les éléments de  $\Sigma$  sont représentés par 49 solutions données dans [LT08]. Quatre solutions à paramètres (le même couple  $(q, s)$  correspond à une infinité continue de  $(\theta_i)$ ) numérotées par  $I - IV$  et 45 solutions isolées numérotées par  $1 - 45$ .

Chaque élément de ces 49 donne au plus trois orbites différentes sous  $H$ . Deux 7-uplets identifiés par  $H$  le sont par la relation  $Rel$  : "Donner la même monodromie projective modulo  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$ ".

La relation  $Rel$  est la relation naturelle pour les questions que l'on se pose sur les feuilletages.

On souhaite donner un système de représentants sous  $Rel$  pour la réunion des  $1 - 45$  orbites sous  $G$ . Chacune des solutions  $1 - 45$  conduit à au plus trois classes d'équivalences de 7-uplets représentées par  $q$ ,  $s_\delta q$  et  $s_x s_\delta s_x$ .

On obtient  $(45 \times 3)$  7-uplets et on doit voir lesquels sont équivalents sous  $Rel$ . Pour avoir les 7-uplets complets, et non seulement les quadruplets comme dans la liste de Tykhyi-Lysovii, on a consulté leur bibliographie (Boalch, Dubrovin-Mazocco et Kitaev, Kitaev-Vidunas).

En calculant avec Maple, on remarque que les classes sous  $Rel$  coïncident avec les classes d'une relation *a priori* plus faible : on utilise une forme normale sur le quadruplet des  $\theta_i$  ; on fait des translations entières et des changements de signes sur chacun d'eux pour les ramener dans l'intervalle  $[0, 1/2]$  : pour chaque  $i$  on remplace  $\theta_i$  par  $\alpha_i = \theta_i - \lfloor \theta_i \rfloor$ , puis on pose  $\beta_i = 1 - \alpha_i$  si  $\alpha_i > 1/2$  et  $\beta_i = \alpha_i$  sinon. Cette opération sur  $\theta_i$  correspondent à faire agir un élément  $f$  de la forme  $\theta \mapsto u\theta + m$  avec  $u \in \{+1, -1\}$  et  $m \in \mathbb{Z}$ , de façon à obtenir  $f(\theta) \in [0, 1/2]$  Si  $\theta_i \notin 1/2 + \mathbb{Z}$ , cet élément est unique et la parité de  $m$  est bien définie, on la représente par  $p_i \in \{0, 1\}$ .

Soit  $L$  la liste des  $(\beta_i)$  rangés dans l'ordre croissant. La forme normale de  $(\theta_i)$  est alors définie comme

$$\begin{cases} (L, \sum_j p_j \bmod 2) & \text{si aucun } \beta_i \text{ n'est } 1/2, \\ L & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit que deux 7-uplets équivalents sous  $Rel$  ont même forme normale. On constate que deux 7-uplets parmi nos  $(45 \times 3)$  7-uplets sont équivalents sous  $Rel$  si ils ont la même forme normale : les rares cas où plusieurs des  $45 \times 3$



solutions donnent la même forme normale sont tranchées par implémentation de l'action de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$ .

Cela facilite la manipulation algorithmique de la relation *Rel*. Dans le tableau suivant, on donne les 45 7-uplets correspondants aux 45 solutions de la liste de Tykhyy-Lysovii et leurs images sous  $s_\delta$  et  $s_x s_\delta s_x$ <sup>(1)</sup>. Plus précisément, on en donne des représentants modulo changements de signes et translations par des éléments de  $(2\mathbb{Z})^7$ , ce qui ne change pas les traces correspondantes.

Les solutions qui sont identifiées sous *Rel* le sont par couples et sont dans la même ligne. Chacun de ces couples contient un élément de la colonne 2. On remplace cet élément par une flèche pointant vers la case de l'autre membre du couple, un tel élément sera dit *rayé* dans la suite.

---

1. Les transformations  $s_\delta$  et  $s_x$  sont décrites dans [LT08].

$n^\circ$	$(\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})$	$[\theta]$	$[s_\delta \theta]$	$[s_x s_\delta s_x \theta]$
1	(2/3, 1/3, 1/2)	(2/5, 1/3, 1/5, 2/3)	(2/5, 7/15, 3/5, 2/15)	(4/5, 1/15, 1/5, 4/15)
2	(1/3, 1/2, 1/3)	(1/5, 1/5, 2/5, 2/5)	$\leftarrow$	(3/5, 1/5, 0, 0)
3	(1/3, 1/2, 1/3)	(1/2, 1/3, 1/3, 1/2)	$\leftarrow$	(5/6, 0, 0, 1/6)
4	(1/2, 1/2, 1/3)	(1/2, 1/2, 1/4, 2/3)	(11/24, 11/24, 17/24, 7/24)	(23/24, 1/24, 5/24, 5/24)
5	(1/2, 3/4, 1/3)	(1/3, 3/4, 1/3, 3/4)	$\leftarrow$	(11/12, 0, 5/12, 0)
6	(4/5, 1/3, 1/3)	(2/5, 2/5, 1/5, 2/3)	(13/30, 13/30, 19/30, 1/6)	(5/6, 1/30, 7/30, 7/30)
7	(2/5, 1/3, 1/3)	(1/5, 1/5, 2/5, 1/3)	(11/30, 11/30, 1/6, 7/30)	(17/30, 1/6, 1/30, 1/30)
8	(1/2, 1/2, 1/3)	(2/7, 2/7, 2/7, 4/7)	(3/7, 3/7, 3/7, 1/7)	(5/7, 1/7, 1/7, 1/7)
9	(2/3, 2/3, 1)	(1/2, 1/4, 1/2, 3/4)	$\leftarrow$	(1, 1/4, 0, 1/4)
10	(1/2, 2/3, 3/4)	(1/3, 1/4, 1/2, 2/3)	(13/24, 5/8, 3/8, 5/24)	(7/8, 7/24, 1/24, 1/8)
11	(2/3, 1/3, 1/2)	(1/2, 2/5, 1/5, 4/5)	(9/20, 11/20, 3/4, 3/20)	(19/20, 1/20, 1/4, 7/20)
12	(3/5, 2/3, 1/2)	(2/5, 2/5, 1/2, 4/5)	(13/20, 13/20, 11/20, 1/4)	(19/20, 1/4, 3/20, 3/20)
13	(4/5, 3/5, 3/5)	(2/5, 2/5, 2/5, 2/3)	(8/15, 8/15, 8/15, 4/15)	(14/15, 2/15, 2/15, 2/15)
14	(1/5, 2/5, 1/5)	(1/5, 1/5, 1/5, 1/3)	(4/15, 4/15, 4/15, 2/15)	(7/15, 1/15, 1/15, 1/15)
15	(1/2, 1/2, 2/3)	(1/2, 1/2, 1/5, 3/5)	(2/5, 2/5, 7/10, 3/10)	(9/10, 1/10, 1/5, 1/5)
16	(1/3, 0, 3/5)	(0, 0, 0, 4/5)	$\rightarrow$	(2/5, 2/5, 2/5, 2/5)
17	(1/3, 0, 1/5)	(0, 0, 0, 2/5)	$\rightarrow$	(1/5, 1/5, 1/5, 1/5)
18	(2/3, 3/5, 3/5)	(1/3, 1/3, 1/3, 4/5)	(17/30, 17/30, 17/30, 1/10)	(9/10, 7/30, 7/30, 7/30)
19	(2/3, 1/5, 1/5)	(1/3, 1/3, 1/3, 2/5)	(11/30, 11/30, 11/30, 3/10)	(7/10, 1/30, 1/30, 1/30)
20	(1/2, 1/4, 2/3)	(1/2, 1/2, 1/2, 2/3)	(7/12, 7/12, 7/12, 5/12)	(11/12, 1/12, 1/12, 1/12)
21	(1/2, 1/2, 1/4)	(1/3, 1/2, 1/2, 2/3)	$\leftarrow$	(1, 1/6, 1/6, 0)
22	(2/5, 2/5, 1/2)	(1/3, 1/5, 1/3, 2/5)	(3/10, 13/30, 3/10, 7/30)	(19/30, 1/10, 1/30, 1/10)
23	(1/3, 2/5, 1/3)	(1/5, 1/3, 1/5, 1/2)	(5/12, 17/60, 5/12, 7/60)	(37/60, 1/12, 13/60, 1/12)
24	(1/5, 1/5, 4/5)	(2/5, 1/3, 2/5, 1/2)	(5/12, 29/60, 5/12, 19/60)	(49/60, 1/12, 1/60, 1/12)
25	(4/5, 2/3, 2/3)	(2/5, 1/2, 1/3, 4/5)	(37/60, 31/60, 41/60, 13/60)	(59/60, 7/60, 17/60, 11/60)
26	(1/3, 1/3, 1/2)	(1/3, 1/3, 1/3, 3/5)	(7/15, 7/15, 7/15, 1/5)	(4/5, 2/15, 2/15, 2/15)
27	(1/5, 1/3, 1/2)	(1/3, 1/3, 1/3, 1/5)	(4/15, 4/15, 4/15, 2/5)	(3/5, 1/15, 1/15, 1/15)
28	(2/3, 1/5, 1/3)	(3/5, 2/3, 3/5, 2/3)	$\leftarrow$	(11/15, 0, 1/15, 0)
29	(2/3, 3/5, 0)	(1/3, 4/5, 1/3, 4/5)	$\leftarrow$	(13/15, 0, 7/15, 0)
30	(1/2, 2/3, 1/3)	(1/2, 1/2, 1/2, 3/4)	(5/8, 5/8, 5/8, 3/8)	(7/8, 1/8, 1/8, 1/8)
31	(1/3, 1/3, 1/5)	(0, 0, 0, 2/3)	$\rightarrow$	(1/3, 1/3, 1/3, 1/3)
32	(1/3, 1/3, 5/7)	(4/7, 4/7, 4/7, 1/3)	(19/42, 19/42, 19/42, 29/42)	(41/42, 5/42, 5/42, 5/42)
33	(1/3, 1/3, 3/7)	(6/7, 6/7, 6/7, 1/3)	(25/42, 25/42, 25/42, 37/42)	(23/42, 11/42, 11/42, 11/42)
34	(1/3, 1/3, 1/7)	(2/7, 2/7, 2/7, 1/3)	(13/42, 13/42, 13/42, 11/42)	(25/42, 1/42, 1/42, 1/42)
35	(1/5, 4/5, 0)	(1/2, 2/5, 1/2, 2/5)	$\leftarrow$	(9/10, 0, 1/10, 0)
36	(1/3, 2/3, 0)	(1/2, 1/5, 1/2, 1/5)	$\leftarrow$	(7/10, 0, 3/10, 0)
37	(2/3, 1/2, 1/3)	(1/3, 1/2, 1/3, 2/5)	(9/20, 17/60, 9/20, 23/60)	(47/60, 1/20, 7/60, 1/20)
38	(2/3, 4/5, 3/5)	(1/3, 1/2, 1/3, 4/5)	(13/20, 29/60, 13/20, 11/60)	(59/60, 3/20, 19/60, 3/20)
39	(1/2, 1/3, 3/5)	(1/3, 1/3, 1/3, 1/2)	(5/12, 5/12, 5/12, 1/4)	(3/4, 1/12, 1/12, 1/12)
40	(1/2, 1/2, 3/5)	(1/2, 1/2, 1/3, 1/5)	(4/15, 4/15, 13/30, 17/30)	(23/30, 7/30, 1/15, 1/15)
41	(1/2, 4/5, 1/2)	(1/2, 1/2, 1/3, 2/5)	(11/30, 11/30, 8/15, 7/15)	(13/15, 2/15, 1/30, 1/30)
42	(2/3, 3/5, 3/5)	(1/3, 1/2, 1/3, 1/2)	$\leftarrow$	(5/6, 0, 1/6, 0)
43	(1/2, 2/5, 1/3)	(1/2, 1/2, 1/2, 1/5)	(7/20, 7/20, 7/20, 13/20)	(17/20, 3/20, 3/20, 3/20)
44	(1/2, 2/3, 1/5)	(1/2, 1/2, 1/2, 2/5)	(9/20, 9/20, 9/20, 11/20)	(19/20, 1/20, 1/20, 1/20)
45	(1/2, 1/5, 2/5)	(1/2, 1/2, 1/2, 2/3)	(7/12, 7/12, 7/12, 5/12)	(11/12, 1/12, 1/12, 1/12)

Le 7-uplets  $(\theta, \sigma)$  de la ligne  $i$  sera noté  $[i, 1]$ . Le 7-uplets  $(s_\delta \theta, \sigma)$  de la ligne  $i$  sera noté  $[i, 2]$ . Le 7-uplets  $(s_x s_\delta s_x \theta, \sigma)$  de la ligne  $i$  sera noté  $[i, 3]$ .

### 2.3. Matrices de monodromie

On donne ici des matrices qui donnent la monodromie du membre générique d'une déformation isomonodromique donnée par une solution irréductible (non nécessairement algébrique) de l'équation de Painlevé VI.

Si  $\mathcal{R}$  est un feuilletage de Riccati à quatre pôles logarithmiques, alors la monodromie  $\rho$  de  $\mathcal{R}$  est donnée par l'image de lacets simples fermés  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_t, \alpha_\infty$  qui font le tour de  $0, 1, t, \infty$  dans le sens direct, donc donne un système de générateurs de  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \infty\})$ . On suppose de plus  $\alpha_\infty \alpha_t \alpha_1 \alpha_0 = 1$ , comme dans la figure 1 Soit  $\rho(\alpha_i) = M_i$ . Posons  $t_i = \text{trace}(M_i)$  et  $t_{ij} = \text{trace}(M_i M_j)$ . On remarque  $t_{ij} = t_{ji}$ . Si  $\rho$  est irréductible, elle est déterminée (modulo conjugaison) par les 7 traces  $(t_i)_{i=0,1,t,\infty}$  et  $t_{01}, t_{1t}, t_{0t}$ . On donne des matrices correspondant à  $\rho$  pour des traces génériques.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t_0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} R & 0 \\ -t_{01} + \frac{1}{2} t_0 t_1 - \frac{1}{2} t_0 R & \frac{1}{2} t_1 - \frac{1}{2} R \end{bmatrix},$$

$$M_t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ où}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \frac{2 t_0^2 t_t + (t_1 t_\infty - 2 t_t t_1 t_{01} - 2 t_{0t} - t_\infty R) t_0 - 4 t_t + t_{0t} t_{01} t_1 + t_{0t} t_{01} R + 2 t_{1t} R + 2 t_t t_{01}^2 + t_1^2 t_t - t_1 t_t R - 2 t_\infty t_{01}}{P}; \\ b &= \frac{(-t_t R - t_t t_1 + 2 t_{1t}) t_{01}^2 + (2 t_\infty R + 4 t_{0t} + t_1^2 t_0 - 2 t_{1t} t_0 t_1 - R t_1 t_{0t} - t_1^2 t_{0t} + t_t t_1 t_0 R) t_{01} + t_0 (-t_t t_0 R - t_t t_0 t_1 + 2 t_0 t_{1t} - t_\infty R t_1 - 4 t_\infty + 2 t_{0t} R + t_1^2 t_\infty)}{PQ}; \\ c &= \frac{-t_\infty (-R t_1 + t_1^2 - 2) t_0^3 + (-t_t t_1 - 2 t_{0t} t_{01} - 2 R t_\infty t_{01} + t_{1t} t_1^2 + 2 t_\infty t_{01} t_1 + t_{0t} t_{01} t_1^2 + t_t R - t_{0t} t_{01} R t_1 - 2 t_{1t} - t_{1t} t_1 R) t_0^2}{PQ} \\ &+ \frac{(4 t_1 t_{0t} - 2 t_\infty t_{01}^2 + 4 t_t t_{01} - 2 t_{0t} t_{01}^2 t_1 + t_1^2 t_{0t} R - 4 t_\infty - t_1^3 t_{0t} + t_1^2 t_\infty + 2 t_{1t} R t_{01} - 2 t_{0t} R + 2 t_{0t} t_{01}^2 R - t_\infty R t_1 - 2 t_{1t} t_{01} t_1) t_0}{PQ} \\ &+ \frac{t_{01} (2 t_{01}^2 t_{0t} - t_t t_{01} R - t_t t_1 t_{01} + 2 t_{1t} t_{01} - 4 t_{0t} + t_1^2 t_{0t} + 2 t_\infty R - R t_1 t_{0t})}{PQ}; \\ d &= \frac{\frac{1}{2} t_1^2 t_t + (-t_{0t} t_{01} + t_t R - t_\infty t_0) t_1 - 4 t_t + 2 t_\infty t_{01} - t_{0t} t_{01} R - 2 t_{1t} R + t_\infty t_0 R + 2 t_0 t_{0t}}{P}; \\ R^2 &= t_1^2 - 4; \\ P &= -4 + t_{01}^2 - t_{01} t_0 t_1 + t_1^2 + t_0^2 \text{ et} \\ Q &= -2 t_{01} + t_0 t_1 - t_0 R. \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.1.** — On note que ces matrices sont à coefficients dans  $\mathbb{Q}((t_i), (t_{ij}), R)$ . On mettra ces formules sur la page web de l'auteur.

### 2.4. Action de Galois sur les solutions algébriques de Painlevé VI

Les 7-uplets manipulés correspondent à des 7-uplets de traces d'éléments du groupe de monodromie (définies au signe près puisque l'on regarde la monodromie projective); chacun de ces derniers est défini sur un corps de nombres

$K = \mathbb{Q}((\cos(\pi\theta_i), (\cos(\pi\sigma_{ij}))) = \mathbb{Q}(Re(\xi_i)_{i=1..7})$ , où les  $\xi_i$  sont des racines de l'unité, puisque dans la liste ci-dessus les  $\theta_i$  et les  $\sigma_{ij}$  sont rationnels.

Comme l'action du mapping class group de la sphère épointée quatre fois sur les 7-uplets de traces est donnée par des polynômes à coefficients entiers, il est clair que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , tout élément de  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$  réalise une bijection de l'ensemble des orbites de taille  $n$  pour cette action.

Ainsi, on a une action de  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$  sur l'ensemble des solutions algébriques de degré  $n$  de l'équation de Painlevé VI.

Le corps  $K$  est inclus dans une extension galoisienne abélienne de  $\mathbb{Q} : L = \mathbb{Q}(\xi)$  pour  $\xi$  une racine de l'unité d'ordre  $d$ , le plus petit commun multiple des ordres des  $\xi_i$ . Par application du théorème fondamental de la théorie de Galois, on obtient que  $L$  est une extension galoisienne de  $\mathbb{Q}$  de groupe  $Gal(K, \mathbb{Q})$  donné par les restrictions des éléments de  $Gal(L, \mathbb{Q})$  à  $K$ , i.e. par les restrictions des  $L \rightarrow L, \xi \mapsto \xi^j$  où  $j$  est premier à  $d$ . L'image de  $\cos(\pi\theta)$  par un tel élément est  $\cos(j\pi\theta)$ , l'action de  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$  s'implémente donc aisément sur les 7-uplets  $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty, \sigma_{01}, \sigma_{1t}, \sigma_{0t})$ .

On donne ci-dessous pour chaque degré, les  $[i, j]$  dont les classes sous Rel sont identifiées par  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ .

degré	orbites
5	$\{[1, 1]\}, \{[1, 3], [1, 2]\}, \{[2, 3]\}, \{[2, 1]\}$
6	$\{[3, 1]\}, \{[4, 2], [4, 3]\}, \{[7, 1], [6, 1]\}, \{[3, 3]\}, \{[4, 1]\},$ $\{[5, 1]\}, \{[7, 3], [6, 2], [7, 2], [6, 3]\}, \{[5, 3]\}$
7	$\{[8, 1], [8, 2], [8, 3]\}$
8	$\{[11, 2], [12, 2], [11, 3], [12, 3]\}, \{[10, 3], [10, 2]\}, \{[10, 1]\}, \{[9, 3]\},$ $\{[11, 1], [12, 1]\}, \{[9, 1]\}$
9	$\{[13, 2], [14, 2], [13, 3], [14, 3]\}, \{[13, 1], [14, 1]\}$
10	$\{[16, 3], [17, 3]\}, \{[15, 2], [15, 3]\}, \{[16, 1], [17, 1]\},$ $\{[15, 1]\}, \{[18, 2], [19, 2], [18, 3], [19, 3]\}, \{[18, 1], [19, 1]\}$
12	$\{[20, 2], [20, 3]\}, \{[22, 1]\}, \{[21, 3]\}, \{[20, 1]\}, \{[25, 1]\},$ $\{[22, 2], [22, 3]\}, \{[23, 1], [24, 1]\}, \{[21, 1]\}, \{[23, 2], [24, 2], [23, 3], [24, 3]\}, \{[25, 2], [25, 3]\}$
15	$\{[26, 1], [27, 1]\}, \{[26, 2], [27, 2], [26, 3], [27, 3]\}, \{[28, 1], [29, 1]\}, \{[28, 3], [29, 3]\}$
16	$\{[30, 2], [30, 3]\}, \{[30, 1]\}$
18	$\{[32, 2], [33, 2], [34, 2], [32, 3], [33, 3], [34, 3]\}, \{[31, 3]\}, \{[32, 1], [33, 1], [34, 1]\}, \{[31, 1]\}$
20	$\{[37, 1], [38, 1]\}, \{[35, 1], [36, 1]\}, \{[35, 3], [36, 3]\}, \{[38, 2], [37, 3], [38, 3], [37, 2]\}$
24	$\{[39, 2], [39, 3]\}, \{[39, 1]\}$
30	$\{[40, 2], [41, 2], [40, 3], [41, 3]\}, \{[40, 1], [41, 1]\}$
36	$\{[42, 3]\}, \{[42, 1]\}$
40	$\{[43, 2], [44, 2], [43, 3], [44, 3]\}, \{[43, 1], [44, 1]\}$
72	$\{[45, 2], [45, 3]\}, \{[45, 1]\}$

Notons que ce calcul simplifie les questions de factorisation de monodromie, comme le montre le lemme 2.4.2.

**Définition 2.4.1.** — Soit  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  une représentation irréductible d'un groupe finiment engendré. On suppose  $\mathrm{trace}(\rho(G)) \subset K$ , avec  $K$  une extension finie galoisienne de  $\mathbb{Q}$ . La classe de conjugaison  $[\rho]$  de  $\rho$  est déterminée par  $L_{[\rho]} = (\mathrm{trace}(\rho(g)))_{g \in \Gamma}$ . Si  $\sigma \in \mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ , on définit une classe de conjugaison  $\sigma[\rho]$  de représentations irréductibles de  $\Gamma$  en fixant  $L_{\sigma[\rho]} = \sigma L_{[\rho]}$  (la variété des caractères de  $\Gamma$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ , tout comme son fermé image des représentations réductibles).

**Lemme 2.4.2.** — Si  $\rho$  et  $K$  sont comme dans la définition précédente et si  $\rho$  se factorise par  $f : \Gamma \rightarrow \Lambda$ , alors pour tout  $\sigma \in \mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ , tout élément de  $\sigma[\rho]$  se factorise par  $f$ .

*Démonstration.* — Soit  $r : \Lambda \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  un morphisme de groupes tel que  $r \circ f = \rho$ .

D'après [MR03, Corollary 3.2.4 p 115], quitte à conjuguer  $\rho$  par une matrice de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , on a  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_2(L)$  avec  $L$  une extension de degré 2 de  $K$ . Soit  $M$  la clôture galoisienne de  $L$ .

Notons  $G_k = \mathrm{Gal}(k, \mathbb{Q})$ . Par le théorème fondamental de la théorie de Galois, on a une *surjection*  $G_M \rightarrow G_K$  induite par la restriction de  $G_M$  à  $K$ .

Ainsi tout élément  $\sigma \in G_K$  se prolonge en un élément  $\tilde{\sigma} \in G_M$ . On peut ainsi faire agir  $\tilde{\sigma}$  sur les éléments de  $\mathrm{SL}_2(M)$ .

On a de cette façon

$$\tilde{\sigma} \cdot (r \circ f) = (\tilde{\sigma} \cdot r) \circ f.$$

Si  $A \in \mathrm{SL}_2(M)$ , alors  $\mathrm{trace}(\tilde{\sigma} \cdot A) = \tilde{\sigma}(\mathrm{trace}(A))$ , en particulier  $\tilde{\sigma} \cdot (r \circ f) \in \sigma[\rho]$ , comme on vient de voir que cet élément se factorise par  $f$ , cela donne le résultat.

□

## 2.5. Solutions pull-back

Si une solution algébrique de Painlevé VI est associée à une déformation isomonodromique de feuilletages de Riccati  $(\mathcal{R}_s)$  donnée par restriction d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  au dessus de  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$  aux fibres de  $\pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ , on dit que la solution est pull-back si  $\mathcal{R}$  est birationnellement équivalent à un pull-back strict d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}_0$  au dessus d'une courbe  $\mathcal{C}_0$ . Si  $\phi : \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}_0$  est l'application qui réalise le pull-back, alors la restriction

$\phi_s$  de  $\phi$  à la fibre générique de  $\pi_{\mathcal{C}}$  est une application holomorphe. Cette restriction est non constante, puisque  $\mathcal{R}_s$  a de la monodromie. Ainsi  $\phi_s$  est un revêtement ramifié,  $\mathcal{C}_0 = \mathbb{P}^1$  et  $\mathcal{R}_s = \phi_s^*(\mathcal{R}_0)$ .

Dans sa thèse [Dia12], Karamoko Diarra a décrit une méthode par laquelle on peut déterminer si une déformation isomonodromique peut être obtenue par pull-back à paramètre d'un feuilletage de Riccati au dessus de  $\mathbb{P}^1$ . Dans cette section on en reprend rapidement le contenu en se restreignant à notre situation où la déformation est donnée par une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. Cela permet d'établir le résultat suivant.

**Théorème 2.5.1.** — *Soit  $(q, t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. Soit  $\mathcal{R}$  le feuilletage de Riccati au dessus de  $\mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$  associé.*

- *Si  $(q, t)$  correspond à l'élément à la  $k$ -ième ligne dans la première colonne du tableau p 49, alors  $\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe sauf si  $k = 16$ ,  $k = 17$  ou  $k = 31$ .*
- *Si  $(q, t)$  correspond à l'élément à la  $k$ -ième ligne d'une autre colonne alors  $\mathcal{R}$  n'est pas pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe sauf si  $k = 8, 16, 17, 30$  ou  $k = 31$ .*

On peut associer au feuilletage  $\mathcal{R}_0$  une structure orbifolde entière  $\underline{p}_{\mathcal{R}_0} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  en fixant  $\underline{p}(t)$  = ordre de la monodromie locale de  $\mathcal{R}$  autour de  $t$ . Si  $t$  n'est pas un pôle de  $\mathcal{R}_0$ , cela signifie  $\underline{p}(t) = 1$ . Si  $\phi_s$  est un revêtement ramifié, on définit le tiré en arrière  $r = \phi_s^*(\underline{p}_{\mathcal{R}_0})$  de  $\underline{p}_{\mathcal{R}_0}$  par  $\phi_s$  comme suit :  $r(x) = \underline{p}(t)/n$  si  $\phi_s$  ramifie à l'ordre  $n$  en  $x$ , avec  $\phi_s(x) = t$ . Notons que  $r$  est alors à valeurs dans  $\mathbb{Q}_+^* \cup \{\infty\}$ , on parle encore de structure orbifolde dans ce cadre. On obtient, pour tout pôle  $x$  de  $\mathcal{R}_s$ , l'inégalité

$$\underline{p}_{\mathcal{R}_s}(x) \geq \phi_s^*(\underline{p}_{\mathcal{R}_0})(x).$$

De plus, si la solution de (PVI) est non constante, il existe une valeur critique mobile  $c(s)$  de  $\phi_s$ , image d'un point de ramification  $k(s)$ .

Ainsi pour une solution non constante de (PVI),

$$\underline{p}_{\mathcal{R}_s} - \frac{\mathbb{1}_{\{k(s)\}}}{2} \geq \phi_s^*(\underline{p}_{\mathcal{R}_0}) \quad (*)$$

Cette inégalité peut être profitablement employée dans le cas où  $(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_0})$  est un orbifolde uniformisable, à savoir est un quotient de  $X = \mathbb{H}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{P}^1$  par un groupe  $\Gamma$  d'isométries muni de sa structure orbifolde entière naturelle, donnée par  $p(t)$  = l'ordre du stabilisateur de  $y$  dans  $\Gamma$ , où  $y$  est dans la fibre de  $t$  pour  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

D'après les travaux sur l'uniformisation de Klein et Poincaré, toute structure orbifold entière sur  $\mathbb{P}^1$  de support contenant au moins trois points est uniformisable. Ainsi, le fait que la monodromie de  $\mathcal{R}_0$  soit irréductible implique que la structure orbifold  $\underline{p}_{\mathcal{R}_0}$  sur  $\mathbb{P}^1$  soit uniformisable.

De plus, tout orbifold uniformisable est muni de la métrique induite par son revêtement universel  $X$ , qui est singulière uniquement sur le support de la structure orbifold. Par triangulation géodésique, si  $X = \mathbb{P}^1$  ou  $X = \mathbb{H}$ , l'aire de l'orbifold pour cette métrique est donnée par  $A = 2\pi\chi$  ou  $A = -2\pi\chi$  où

$$\chi(\mathbb{P}^1, p) = 2 + \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \left( \frac{1}{p(t)} - 1 \right)$$

est appelée la caractéristique d'Euler de l'orbifold. Ainsi, si  $\chi = 0$  alors  $X = \mathbb{C}$ ; si  $\chi > 0$  alors  $X = \mathbb{P}^1$  et si  $\chi < 0$  alors  $X = \mathbb{H}$ .

On voit que  $\chi < 0$  dès que le support de  $p$  contient au moins cinq points. Par analyse exhaustive pour les supports de cardinal 3 et 4, on voit que les seules structures orbifoldes entières  $p = \underline{p}_{\mathcal{R}_0}$  sur  $\mathbb{P}^1$  avec  $\chi(\mathbb{P}^1, p) \geq 0$  et  $\mathcal{R}_0$  de monodromie irréductible sont données par les listes de valeurs non triviales suivantes :

- pour  $\chi = 0$  :  $(p(t_i)) = (2, 2, \infty), (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$  ou  $(2, 2, 2, 2)$  ;
- pour  $\chi > 0$  :  $(p(t_i)) = (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$  ou  $(2, 2, k), k < \infty$ .

Si  $\phi_s : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un revêtement ramifié de l'orbifold uniformisé par  $\mathbb{H}(\mathbb{P}^1, p)$ , alors on peut tirer en arrière par  $\phi_s$  la métrique donnée par  $p$ . L'aire de  $\mathbb{P}^1$  pour la métrique tirée en arrière est alors donnée par  $-2\pi\chi(\mathbb{P}^1, \phi_s^*(p))$ , comme on peut le voir en utilisant une bonne triangulation. On en tire ainsi

$$\chi(\mathbb{P}^1, \phi_s^*(p)) = d \cdot \chi(\mathbb{P}^1, p).$$

Dans notre contexte de structure orbifold associée à une équation de Riccati sur  $\mathbb{P}^1$ , pour  $\underline{p} = \underline{p}_{\mathcal{R}_0}$ , l'inégalité  $(\star)$  permet d'obtenir

$$\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_s}) + 1 \leq \chi(\mathbb{P}^1, \phi_s^*(\underline{p}_{\mathcal{R}_0}))$$

et

$$\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_s}) + 1 \leq d \cdot \chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_0}).$$

Pour  $\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_0}) < 0$ , cela donne une borne pour le degré  $d$  de  $\phi_s$ .

1. Par exemple, on voit ainsi que si  $\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_0}) < 0$  et  $\underline{p}_{\mathcal{R}_0}$  a un support contenant au moins quatre points et  $\max(\underline{p}_{\mathcal{R}_0}) = m$  alors

$$\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_0}) \leq 1/m - 1/2$$

et, par une majoration grossière,  $\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_s}) + 1 \geq -1$ , ce qui fournit

$$d \leq \frac{2m}{m-2}.$$

Ainsi, pour  $m > 6$ ,  $d \leq 2$  et la déformation (non triviale)  $\mathcal{R}_s$  est membre d'une solution à paramètre, puisque l'exposant  $k/m$  de  $\mathcal{R}_0$  peut être remplacé par n'importe quel autre exposant dans la déformation à quatre pôles  $\phi_s^*(\mathcal{R}_0)$ , vu que  $m > 2$ .

2. Par des raisonnements du même type, en raffinant l'estimation de  $\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_s})$ , on voit que si  $\underline{p}_{\mathcal{R}_0}$  satisfait  $\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_0}) < 0$  et a un support de cardinal 3, les seuls triplets de valeurs non triviales possibles pour  $\underline{p}_{\mathcal{R}_0}$  correspondant à une solution pull-back sans paramètre de (PVI) sont les suivantes  $(2, 3, 7)$ ,  $(2, 3, 8)$ ,  $(2, 3, 9)$ .
3. De plus, on sait que les solutions icosaédrales, octaédrales et tétraédrales de Boalch sont obtenues par pull-back, en vertu d'un théorème de Klein.

On peut appliquer cela aux solutions du tableau page 49. Par 3., dans la première colonne, toutes les solutions non contenues dans

$$S = \{[8, 1], [16, 1], [17, 1], [31, 1], [32, 1], [33, 1], [34, 1]\}$$

sont obtenues par pull-back et il en est de même pour les solutions contenues dans  $\Sigma = \{[31, 3], [16, 3], [17, 3]\}$ . Toute solution non rayée de la colonne 2 est Galois équivalente à la solution de la colonne 3 de la même ligne. Il reste donc à traiter les solutions de  $S$  et les solutions de la colonne 3 non contenues dans  $\Sigma$ . Inspectant les dénominateurs des exposants de ces solutions, on constate que ces solutions ne peuvent être obtenues par pull-back d'un  $\mathcal{R}_0$  avec

$$\chi(\mathbb{P}^1, \underline{p}_{\mathcal{R}_0}) \geq 0.$$

En notant

$$\max(\underline{p}_{\mathcal{R}_s}) \leq \max(\underline{p}_{\mathcal{R}_0}),$$

en utilisant 1. et en inspectant les dénominateurs, on voit que ces solutions ne sont pas obtenues par pull-back d'un  $\mathcal{R}_0$  avec  $\underline{p}_{\mathcal{R}_0}$  de support de cardinal  $> 3$ . Par 2., il reste à voir lesquelles de ces solutions peuvent être obtenues par pull-back d'un  $\mathcal{R}_0$  associé à  $(2, 3, 7)$ ,  $(2, 3, 8)$  ou  $(2, 3, 9)$ .

Encore par inspection des dénominateurs, on voit que cela est envisageable uniquement pour  $[8, 1]$ ,  $[8, 3]$ ,  $[30, 3]$ ,  $[32, 1]$ ,  $[33, 1]$ ,  $[34, 1]$ . Comme les ensembles  $\{[8, 1], [8, 3]\}$  et  $\{[32, 1], [33, 1], [34, 1]\}$  sont contenus dans des orbites sous Galois, il suffit de voir lesquelles de solutions  $[8, 1]$ ,  $[30, 3]$  et  $[34, 1]$  sont obtenues par pull-back d'un  $\mathcal{R}_0$  associé à  $(2, 3, 7)$ ,  $(2, 3, 8)$ ,  $(2, 3, 9)$ .



Les types de ramification des revêtements qui permettent de tirer en arrière ce type de  $\mathcal{R}_0$  ont été identifiés par C. Doran dans [Dor01, Corollary 4.6 p 79]. Dans [Boa07], Boalch a en fait obtenu la solution [34, 1] par pull-back en utilisant un de ces revêtements (de degré 10), il y a aussi remarqué que sa solution de Klein, la solution [8, 1] ici, est obtenue par un des revêtements de degré 12. De même, il y a remarqué que [30, 2] est obtenue par pull-back, il en est donc de même pour sa Galois conjuguée [30, 3].

Finalement, les solutions obtenues par pull-back sont

- toutes les solutions de la première colonne sauf [16, 1], [17, 1], [31, 1] et
- les solutions [16, 3], [17, 3], [30, 2], [30, 3], [31, 3], [8, 2], [8, 3].

Cela conclut la preuve du théorème 2.5.1.

Pour usage ultérieur notons ce qui suit.

**Lemme 2.5.2.** — *Les feuilletages de Riccati  $\mathcal{R}$  non pull-back de feuilletages de Riccati au dessus de courbes décrits au théorème 2.5.1 ont une monodromie Zariski-dense dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(\mathcal{R}_s)$  la déformation isomonodromique à quatre pôles associée à un tel  $\mathcal{R}$ . Soit  $s_0$  générique et  $G$  le groupe de monodromie de  $\mathcal{R}_{s_0}$ . Le groupe  $G$  est infini d'après Klein comme on l'a indiqué dans la preuve du théorème 2.5.1. Par définition du tableau p 49,  $G$  est aussi irréductible.

Raisonnons maintenant par l'absurde. Si  $G$  n'est pas Zariski-dense, par connaissance des sous groupes non Zariski-denses de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  (voir [Chu99]), il doit donc être "un groupe diédral infini". On entend par là que, pour une coordonnée  $z$  sur la sphère de Riemann et un sous groupe infini  $H$  de  $\mathbb{C}^*$ , de la forme  $E_1 \cup E_2$  où  $E_1 = \{z \mapsto \alpha \cdot z, \alpha \in H\}$  et  $E_2 = \{z \mapsto \frac{1}{\alpha z}, \alpha \in H\}$ . On constate alors, par examen des exposants  $(\theta_i \neq k/2)$  pour les solutions non pull-back données au théorème 2.5.1, que  $G$  est engendré par un système de générateurs dont aucun n'est d'ordre 2 ; cela montre que ces générateurs sont dans  $E_1$  et  $G \subset E_1$ , ce qui est absurde.  $\square$

## 2.6. Corps de traces du groupe de monodromie

Voici un énoncé qui permet de circonscrire la monodromie du feuilletage de Riccati déduit d'une solution algébrique de (PVI).

**Lemme 2.6.1.** — Soit  $(q, t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  une solution algébrique de (PVI) de paramètres  $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty)$  avec, pour tout  $i$ ,  $\theta_i \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ . Soit  $\mathcal{R}$  le feuilletage de Riccati obtenu au dessus de  $X = \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$  à partir de cette solution. Soit  $D_0$  la réunion des quatre sections  $x = 0, 1, t(s), \infty$  de  $\pi : X \rightarrow \mathcal{C}$  qui donnent les pôles de  $\mathcal{R}_s$  et  $D$  la réunion de  $D_0$  et des fibres  $s = s_0$  pour lesquelles  $t(s_0) = 0, 1$  ou  $\infty$ . On suppose que la monodromie de  $\mathcal{R}_s$  n'est pas abélienne.

Alors l'image de la monodromie à l'infini de  $\mathcal{R}| = \mathcal{R}|_{X \setminus D}$  est formée d'éléments quasi unipotents et contenus dans l'image de la monodromie de la restriction  $\mathcal{R}|_F$  à une fibre générique de  $\pi$ .

*Démonstration.* — D'abord, toutes les fibres  $F : s = s_0$  de  $\pi$  satisfaisant  $t(s_0) \neq 0, 1, \infty$  donnent la même image pour la monodromie de  $\mathcal{R}|_F$ . Ensuite, il suffit de faire une discussion au voisinage d'une fibre  $G : s = s_1$  avec  $t(s_1) = 0, 1$  ou  $\infty$ . Quitte à changer de coordonnée sur  $\mathbb{P}^1$ , on peut supposer  $t(s_1) = 1$ . Soit  $n$  l'ordre de contact entre  $x = t(s)$  et  $x = 1$  en  $s = s_1$ . Soit  $F \neq G$  une fibre de  $\pi$  voisine de  $G$ . Par l'algorithme de calcul du  $\pi_1$  pour un fibré localement trivial avec section, on détermine une présentation du groupe fondamental d'un voisinage  $V$  de  $G$  dans  $X$  :

$$\pi_1(V) = \left\langle \gamma, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_t, \alpha_\infty \left| \begin{array}{l} \alpha_\infty \alpha_t \alpha_1 \alpha_0 = 1, \quad [\gamma, \alpha_i] = 1, [\gamma(\alpha_t \alpha_1)^n, \alpha_j] = 1; \\ i = 0, \infty; j = 1, t \end{array} \right. \right\rangle.$$

Le lacet  $\gamma$  est un lacet simple qui fait le tour de  $G$  et  $\alpha_i$  est un lacet simple dans  $F$  qui fait le tour de la section  $x = i$  de  $\pi$ . Soient  $\Gamma$  et  $A_i$  les images de  $\gamma$  et  $\alpha_i$  par la représentation de monodromie de  $\mathcal{R}|$ .

On remarque que  $A_0$  ou  $A_\infty$  est non trivial, puisque sinon la monodromie de  $\mathcal{R}_s$  est abélienne. On fait un raisonnement dans le cas où ces deux éléments sont non triviaux ; un raisonnement analogue fonctionne si l'un d'eux est trivial.

La condition  $\theta_i \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ , signifie qu'aucun des  $A_i$ ,  $i = 0, 1, t, \infty$  n'est d'ordre 2. Les relations  $[\Gamma, A_i] = 1$ ,  $i = 0, \infty$  imposent donc que  $\Gamma$ ,  $A_0$  et  $A_\infty$  ont les mêmes points fixes sur  $\mathbb{P}^1$ , à moins que  $\Gamma$  soit trivial. Si  $\Gamma$  n'est pas trivial, on remarque  $A_t A_1 = (A_0 A_\infty)^{-1}$ , et donc si l'élément  $\Gamma(A_t A_1)^n$  est non trivial, il a les mêmes points fixes que  $A_0$  et  $A_\infty$ , mais dans ce cas les relations  $[\Gamma(A_t A_1)^n, A_j] = 1$ ,  $j = 1, t$  indiquent que  $A_t$  et  $A_1$  -qui ne sont pas d'ordre 2- commutent à  $A_0$  et  $A_\infty$ , ce qui est absurde puisque la monodromie de  $\mathcal{R}_s$  est irréductible. Finalement,  $\Gamma = 1$  ou  $\Gamma = (A_t A_1)^{-n} = (A_0 A_\infty)^n$ . Dans le second cas, comme  $A_0$  et  $A_\infty$  sont tous deux d'ordre fini ou paraboliques dans un même sous groupe abélien de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ , on a  $\Gamma$  du même type, en particulier, il est quasi unipotent.

Ceci est suffisant pour conclure la preuve, d'après Kashiwara [Kas81, proposition 3.3. p 766].  $\square$

**Proposition 2.6.2.** — *Les feuilletages de Riccati  $\mathcal{R}$  associés aux solutions sporadiques irréductibles de (PVI) qui ne sont pas obtenues par pull-back de feuilletages de Riccati au dessus de courbes (cf théorème 2.5.1) ont une monodromie pull-back d'un facteur de la représentation tautologique d'un "polydisk Shimura  $D$ - $M$  stack" au sens de [CS08, Theorem 2 p 1273].*

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{R}$  comme dans l'énoncé. D'après le lemme 2.5.2, la monodromie de  $\mathcal{R}$  est Zariski-dense. Elle est aussi quasi-unipotente à l'infini d'après le lemme 2.6.1. La monodromie de  $\mathcal{R}$  ne factorise pas par une courbe, c'est en fait en ce qu'on montre pour montrer le théorème 2.5.1. On peut ainsi appliquer le théorème [CS08, Theorem 2 p 1273].  $\square$

Une question naturelle est d'estimer la dimension du polydisque en question.

En regardant le travail de Corlette et Simpson on peut voir, dans le cas où la représentation de monodromie est définie sur une extension totalement imaginaire  $L$  d'une extension  $F$  totalement réelle de  $\mathbb{Q}$ , que cette dimension est majorée par le degré de l'extension  $\mathbb{Q} \rightarrow F$ .

On peut appliquer cela aux feuilletages associés aux solutions sporadiques irréductibles non pull-back de (PVI) qui sont paramétrées par  $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ . En effet le groupe de monodromie  $G$  de  $\mathcal{R}$  est alors engendré par les éléments de monodromie à l'infini, puisque  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  est simplement connexe, et l'application du lemme 2.6.1 nous montre que  $G$  est en fait engendré par le groupe de monodromie de  $\mathcal{R}_s$ . C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 2.6.3.** — 1. Parmi les solutions sporadiques irréductibles non pull-back de (PVI) qui sont paramétrées par  $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$  seules les suivantes (et leurs Galois conjuguées) ont un groupe de monodromie  $G$  dont le corps des traces  $F = \mathbb{Q}(\text{trace}(G))$  est une extension au plus quadratique de  $\mathbb{Q}$ .

- $[2, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ;
- $[3, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ,
- $[9, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ;
- $[16, 1], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

2. De plus,  $G$  est défini sur une extension totalement imaginaire de  $F$ .

3. En outre, si une solution sporadique irréductible non pull-back de (PVI) qui n'est pas paramétrée par  $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$  a un corps de trace  $F$  de degré  $\leq 2$  sur  $\mathbb{Q}$  alors cette solution est la solution  $[31, 1]$  et  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

*Démonstration.* — 1. Comme on l'a dit ci-dessus, si la solution est paramétrée par  $\mathbb{P}^1$  le groupe de monodromie  $G$  du feuilletage  $\mathcal{R}$  correspondant est aussi celui de  $\mathcal{R}_s$ . De plus, le corps des traces du groupe de monodromie de  $\mathcal{R}_s$  est  $F = \mathbb{Q}((\cos(\pi\theta_i), (\cos(\pi\sigma_{ij})))$ . Connaissant les paramètres  $(\theta_i)$  et  $\sigma_{ij}$  le résultat se résume donc à un calcul simple.

2. les matrices que nous proposons dans la section 2.3 montrent dans chacun des cas notre assertion.
3. C'est le même calcul qu'au 1., avec une moindre portée puisqu'on ne peut appliquer le lemme 2.6.1.

□

**Remarque 2.6.4.** — Reprenons certains éléments de la liste de la proposition 2.6.3 et commentons.

- $[3, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ , c'est la solution que nous utilisons au chapitre 4 ;
- $[16, 1], F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , cette solution et sa Galois conjuguée apparaissent lorsque l'on regarde les contacts entre les feuilletages modulaires associés à  $\sqrt{5}$  donnés par Mendes et Pereira dans [MP05] et le pinceau des droites issues du point triple de leur diviseur invariant (commun).
- $[9, 3], F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  ; cette solution apparaît être un bon candidat pour obtenir la structure transverse des feuilletages modulaires de Hilbert associés à  $\sqrt{2}$ , par la même méthode que celle utilisée pour  $\sqrt{3}$ .



## CHAPITRE 3

### FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT PROJECTIFS

La notion de structure transversalement projective (singulière) a été d’abord étudiée par B. Scárdua dans sa thèse [Scá97]. Les contributions suivantes dans ce domaine ont été celles de [CLNL<sup>+</sup>07] et [LP07]. On se référera librement à ces trois références. On donne quelques résultats utiles avant de s’intéresser à la structure transversalement projective des feuilletages modulaires de Hilbert.

#### 3.1. Feuilletages, structures transversalement projectives

On reprend ici la définition de Loray-Pereira.

**Définition 3.1.1.** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe singulier sur une variété complexe lisse  $X$ . Une structure transversalement projective pour  $\mathcal{F}$  est la donnée d’un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P$  sur  $X$  muni d’un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  et d’une section méromorphe  $\sigma$  telle que  $\sigma^*\mathcal{R} = \mathcal{F}$ . On dit alors que  $\mathcal{F}$  est un feuilletage transversalement projectif.

**Définition 3.1.2.** — Deux structures transversalement projectives  $(P_i, \mathcal{R}_i, \sigma_i)$  sont dites biholomorphiquement (resp. biméromorphiquement) équivalentes si il existe une transformation biholomorphe (resp. biméromorphe) de fibrés  $\Phi$  telle que  $\Phi^*(P_2, \mathcal{R}_2, \sigma_2) = (P_1, \mathcal{R}_1, \sigma_1)$

Pour un feuilletage sur une surface complexe lisse, parmi tous les représentants biméromorphes d’une même structure transversalement projective, Loray et Pereira [LP07] ont défini un représentant préféré; nous en donnons tout de suite la définition dans le cadre restreint des structures transversalement projectives à pôles logarithmiques.

**Définition 3.1.3.** — Soit  $\Sigma = (\pi, \mathcal{R}, \sigma)$  une structure transversalement projective à pôles logarithmiques pour un feuilletage sur une surface complexe lisse. On dit que  $\Sigma$  est sous *forme minimale* si  $\mathcal{R}$  n'a aucun pôle apparent et si, pour toute composante de pôle  $D$  de  $\mathcal{R}$ ,  $\sigma|_D$  est génériquement disjointe des sections de singularités au dessus de  $D$ .

Ils ont montré (sur les surfaces) [LP07, Theorem 1.1] que toute structure transversalement projective à pôles logarithmes possède un représentant biméromorphe sous forme minimale et que ce dernier est unique modulo transformations biholomorphes de fibrés.

**Lemme 3.1.4.** — Soit  $X$  une variété complexe de dimension  $> 0$ . Soit  $(E, \mathcal{R}, \sigma)$  une structure transversalement projective sur  $X$ . Si  $\Phi$  est transformation birationnelle de jauge de  $E$  qui réalise un automorphisme de  $(E, \mathcal{R}, \sigma)$ , alors  $\Phi$  est triviale.

*Démonstration.* — Si  $U$  est un ouvert de trivialisatation de  $E$  connexe, dans une trivialisatation au dessus de  $U$ ,  $\Phi$  s'écrit  $U \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow U \times \mathbb{P}^1$ ,  $(x, z) \mapsto (x, A(x).z)$  avec  $A : U \dashrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Soit  $x_0 \in U$  un point qui n'est pas un pôle de  $\mathcal{R}$ . Dans un voisinage  $V \subset U$  de  $x$  on peut faire un changement de variable holomorphe  $z' = B(x).z$  et redresser  $\mathcal{R}$  sur  $dz' = 0$ ,  $\sigma$  s'écrit alors  $z' = f(x)$  avec  $f$  ouverte. La fonction  $x \mapsto C(x) = BAB^{-1}(x)$  définit alors un automorphisme de  $dz = 0$ , elle est donc constante :  $C(x) = C$ . De plus,  $C.f(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $V$ , comme  $f$  est ouverte,  $C = 1$ . Ainsi  $A \equiv 1$  sur  $V$ , et par prolongement analytique  $A \equiv 1$  sur  $U$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 3.2. Projection des conjugaisons

**Lemme 3.2.1.** — Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement étale entre variété complexes lisses connexes. Soient  $\Sigma_i = (E_i, \mathcal{R}_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, 2$  deux structures transversalement projectives sur  $X$ . Si  $p^*\Sigma_1$  et  $p^*\Sigma_2$  sont birationnellement (resp. holomorphiquement) équivalentes, alors  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  le sont aussi.

*Démonstration.* — Soit  $(U_j)_{j \in J}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts élémentaires de  $p$  assez petits. On peut supposer que les  $E_i$  sont trivialisables au dessus des  $U_j$  et sont donnés par changements de trivialisations  $(\phi_{j,k}^i)_{j,k \in J}$ . Alors  $p^*E_i$  est donné par les ouverts de trivialisatation  $(V_j) = (p^{-1}(U_j))$  et les changements  $(p^*\phi_{j,k}^i)$ .

Si  $\Psi$  est une transformation de jauge birationnelle satisfaisant  $\psi^*p^*\Sigma_2 = p^*\Sigma_1$  alors elles est données par ses matrices  $(A_j)$  dans les trivialisations, i.e.

par des fonctions  $A_j : V_j \dashrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  satisfaisant  $A_j = (p^* \phi_{k,j}^2) A_k (p^* \phi_{j,k}^1)$ . On veut montrer  $A_j = p^* B_j$  pour  $B_j : U_j \dashrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Les matrices  $B_j$  satisfairont alors  $B_j = \phi_{k,j}^2 B_k \phi_{j,k}^1$  et définiront un isomorphisme birationnel (resp. holomorphe) de fibré :  $\psi : E_1 \dashrightarrow E_2$ . On aura alors un diagramme commutatif de  $\mathbb{P}^1$ -fibrés comme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} p^* E_1 & \xrightarrow{p_*} & E_1 \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ p^* E_2 & \xrightarrow{p_*} & E_2 \end{array}$$

On fixe un  $j$  et travaille au dessus de  $U = U_j$ . L'ouvert  $V = V_j$  est union disjointe de connexes  $(W_m)_{m \in M}$  tels que  $p_m = p|_{W_m} : W_m \rightarrow U$  est un isomorphisme. Notons  $A = A_j$ . Soient  $m, n \in M$ , on a, par définition, en restreignant convenablement,  $p_{n*} \Psi^* p_n^* \Sigma_2 = \Sigma_1 = p_{m*} \Psi^* p_m^* \Sigma_2$  donc  $p_n \Psi p_n^{-1} p_m \Psi^{-1} p_m^{-1}$  induit un automorphisme de  $\Sigma_2|_U$ , d'après le lemme 3.1.4, cela implique  $p_n \Psi p_n^{-1} = p_m \Psi p_m^{-1}$ . Ainsi  $A = p^* B$  où  $B$  est la matrice de  $p_n \Psi p_n^{-1}$ . On conclut en déduisant du diagramme commutatif que  $\mathcal{R}_1 = \psi^* \mathcal{R}_2$ , puisque  $p_*$  et  $\Psi^{-1}$  sont génériquement des submersions.  $\square$

**Lemme 3.2.2.** — *Soit  $p : Y \rightarrow X$  est un revêtement ramifié entre variétés complexes lisses connexes. Soient  $\Sigma_i = (E_i, \mathcal{R}_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, 2$  deux structures transversalement projectives sur  $X$ . Soient  $D$  le lieu de ramification de  $p$  et  $D_i$  le lieu polaire de  $\mathcal{R}_i$ . On suppose que les  $D_i$  n'ont pas de composante commune avec  $D$ . Si  $p^* \Sigma_1$  et  $p^* \Sigma_2$  sont birationnellement (resp. holomorphiquement) équivalentes, alors  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  le sont aussi.*

*Démonstration.* — On applique le lemme 3.2.1 à  $\Sigma_i|_{X \setminus D}$ . On obtient ainsi une équivalence de jauge birationnelle entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Cette dernière se prolonge méromorphiquement (resp. holomorphiquement) à  $X$  en dehors de  $D \cap (D_1 \cup D_2)$  qui est de codimension  $> 1$ ; elle se prolonge donc méromorphiquement (resp. holomorphiquement) à  $X$  par le théorème de Levi.  $\square$

**Lemme 3.2.3.** — *Si  $(E_1, \mathcal{R}_1, \sigma_1)$  et  $(E_2, \mathcal{R}_2, \sigma_2)$  sont deux structures transversalement projectives sur une variété complexe lisse  $X$  avec  $\mathcal{R}_i$  sans pôles et  $\sigma_i$  holomorphes. Soient  $Y$  une variété complexe lisse et  $p : Y \rightarrow X$  une submersion à fibres connexes. Si  $p^*(E_1, \mathcal{R}_1, \sigma_1)$  et  $p^*(E_2, \mathcal{R}_2, \sigma_2)$  sont birationnellement (resp. holomorphiquement) équivalents, alors il en est de même pour  $(E_1, \mathcal{R}_1, \sigma_1)$  et  $(E_2, \mathcal{R}_2, \sigma_2)$ .*



*Démonstration.* — C'est presque la même preuve que pour le lemme 3.2.1. Soit  $(U_j)_{j \in J}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts assez petits. On peut supposer que les  $E_i$  sont trivialisables au dessus des  $U_j$  et sont donnés par changements de trivialisations  $(\phi_{j,k}^i)_{j,k \in J}$ . Alors  $p^*E_i$  est donné par les ouverts de trivatisation  $(V_j) = (p^{-1}(U_j))$  et les changements  $(p^*\phi_{j,k}^i)$ .

Si  $\Psi$  est une transformation de jauge birationnelle satisfaisant  $\psi^*p^*\Sigma_2 = p^*\Sigma_1$  alors elles est données par ses matrices  $(A_j)$  dans les trivialisations, i.e. par des fonctions  $A_j : V_j \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  satisfaisant  $A_j = (p^*\phi_{k,j}^2)A_k(p^*\phi_{j,k}^1)$ . On veut montrer  $A_j = p^*B_j$  pour  $B_j : U_j \dashrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Les matrices  $B_j$  satisfairont alors  $B_j = \phi_{k,j}^2 B_k \phi_{j,k}^1$  et définiront un isomorphisme birationnel (resp. holomorphe) de fibré :  $\psi : E_1 \dashrightarrow E_2$ . On aura alors un diagramme commutatif de  $\mathbb{P}^1$ -fibrés comme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} p^*E_1 & \xrightarrow{p_*} & E_1 \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ p^*E_2 & \xrightarrow{p_*} & E_2 \end{array}$$

On fixe un  $j$  et travaille au dessus de  $U = U_j$  en fixant  $V = V_j$  et  $A = A_j$ .

Soient  $u_1, \dots, u_n$  les fonctions coordonnées de  $p$  (dans une carte fixée). Au voisinage de  $y_1$ ,  $u_1, \dots, u_n$  se complète en un système de coordonnées locales  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_r$  sur  $Y$ . La transformation birationnelle  $\Psi$  s'écrit, dans les trivialisations indiquées  $z' = A(u, v).z$  au voisinage de  $y_1$  avec  $A(u, v)$  une fonction méromorphe de  $u$  et  $v$  vers  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Comme les sous-variétés  $z = z_0, u = u_0$  sont invariantes par  $p^*\mathcal{R}_1$  et les sous-variétés  $z' = z_1, u = u_0$  sont invariantes par  $p^*\mathcal{R}_2$ ,  $A(u_0, v)$  est constante, donc  $A$  ne dépend pas de  $v$ ,  $A = A(u)$ . On associe ainsi à  $y_1$  la fonction sur  $U$ ,  $u \mapsto A_{y_1}(u)$ . On peut faire de même pour  $y_2$  et par connexité on obtient  $A_{y_1} = A_{y_2}$ , ce qui permet de conclure comme pour le lemme 3.2.1.  $\square$

**Remarque 3.2.4.** — On doit pouvoir combiner les deux énoncés précédents par factorisation de Stein.

### 3.3. Compactification de la structure transverse des feuilletages modulaires

Dans [Cou12], on décrit comment se construit la structure transversalement projective des feuilletages modulaires (au sens de Brunella) en dehors des points singuliers et des cusps de la surface sous-jacente  $Y_\Gamma = \overline{\mathbb{H}} \times \overline{\mathbb{H}}/\overline{\Gamma}$ ; on

y donne de simples indications pour prolonger cette construction au voisinage des chaînes de courbes rationnelles correspondant aux singularités et au voisinage des cycles de courbes rationnelles utilisées pour compactifier aux cusps. L'idée générale est de quotienter la structure transverse triviale du feuilletage donné sur  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  par la projection  $x$  sur le premier facteur. Cette dernière est donnée par le fibré trivial

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{H} \\ (z, (x, y)) &\longmapsto (x, y), \end{aligned}$$

le feuilletage de Riccati  $z = cste$  et la section  $z = x$ .

On souhaite détailler ces constructions ici. On commence par le faire au voisinage des chaînes de Hirzebruch-Jung.

**3.3.1. Compactification aux points singuliers.** — On utilise la description de Riemenschneider [Rie74] de  $\pi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow Y_\Gamma$  et de  $E : \tilde{Y}_\Gamma \rightarrow Y_\Gamma$  au voisinage d'un point singulier  $p$  (issu d'un point à stabilisateur non trivial de  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ). Le stabilisateur correspondant est (fini) cyclique. Ainsi localement,  $q$  se décrit comme la projection  $\pi_{n,q} : \mathbb{C}^2 \rightarrow X_{n,q}$  de  $\mathbb{C}^2$  sur son quotient par l'action du groupe  $G_{n,q} = \langle (x, y) \mapsto (\xi x, \xi^q y) \rangle$  où  $\text{ordre}(\xi) = n$ ,  $n > q > 0$  et  $n \wedge q = 1$ ; les feuilletages modulaires sont les projetés des feuilletages  $x = cste, y = cste$  de  $\mathbb{C}^2$ . Hirzebruch a désingularisé  $X_{n,q}$  : la désingularisation  $\tilde{X}_{n,q}$  est une variété lisse construite en recollant des cartes  $(u_i, v_i)_{i=0,\dots,r}$  de  $\mathbb{C}^2$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1/u_0, v_1 = u_0^{b_1} v_0 \\ v_2 &= 1/v_1, u_2 = v_1^{b_2} u_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

où les  $b_i$  sont déterminés par une variante de l'algorithme des fractions continues appliqué à  $\frac{n}{q}$  : on utilise la partie entière supérieure au lieu de la partie entière inférieure. Par exemple,

$$\frac{17}{7} = 3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{4}} \leftrightarrow [3, 2, 4].$$

On définit les  $b_i$  par

$$\frac{n}{q} \leftrightarrow [b_1, \dots, b_r].$$

Définissons aussi

$$\begin{cases} \frac{n}{n-q} \leftrightarrow [a_2, \dots, a_{e-1}], \\ i_1 = n, i_2 = n - q \text{ et pour } 2 \leq \epsilon \leq e - 1, \\ i_{\epsilon+1} = a_\epsilon i_\epsilon - i_{\epsilon-1} \text{ (*)}. \end{cases}$$

On définit deux autres familles  $(j_\epsilon)_{1 \leq \epsilon \leq e}$  et  $(k_\epsilon)_{1 \leq \epsilon \leq e}$  en posant  $j_1 = 0, j_2 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1$  et en utilisant la formule de récurrence (\*).

Riemenschneider donne  $\mathbb{C}^2 \rightarrow X_{n,q}$  en coordonnées :  $X_{n,q}$  se plonge dans  $\mathbb{C}^e$ , en factorisant

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^e \\ (x, y) &\longmapsto (s_1, \dots, s_e) = (x^{i_1} y^{j_1}, \dots, x^{i_e} y^{j_e}). \end{aligned}$$

Cela signifie que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\pi_{n,q}} & X_{n,q} \\ & \searrow g & \downarrow i \\ & & \mathbb{C}^e \end{array}$$

Il indique (Satz 5 p 221) que la désingularisation  $\tilde{X}_{n,q} \rightarrow X_{n,q}$  est alors donnée par  $f : \tilde{X}_{n,q} \rightarrow \mathbb{C}^e$  convenablement restreinte, où  $f$  est définie comme le prolongement de  $f(u_0, v_0) = (u_0^{j_\epsilon} v_0^{k_\epsilon})_{1 \leq \epsilon \leq e}$  à  $\tilde{X}_{n,q}$  qui est en fait holomorphe.

Forts de ces informations, nous pouvons aboutir : la structure transverse initiale  $dz = 0, \sigma = \{z = x\}$  sur le fibré trivial, doit être projetée sur  $X_{n,q}$  et relevée à  $\tilde{X}_{n,q}$ . Pour ce faire, on choisit un autre représentant birationnel sur le fibré trivial :

$$d\tilde{z} = (\tilde{z}^2 x^n - (n-1)\tilde{z}) \frac{dx}{x}, \tilde{\sigma} = \{\tilde{z} = \infty\}.$$

Ce dernier est obtenu en posant  $\tilde{z} = \frac{1}{x^{n-1}(z-x)}$ , et est maintenant invariant sous  $G_{n,q}$ . On en déduit la structure

$$\bar{\sigma} = \{\bar{z} = \infty\}, d\bar{z} = (\bar{z}^2 s_1 - (n-1)\bar{z}) \frac{ds_1}{ns_1}$$

sur  $X_{n,q}$ , qui se relève à  $\tilde{X}_{n,q}$  en

$$\hat{\sigma} = \{\hat{z} = \infty\}, d\hat{z} = (\hat{z}^2 v_0 - (n-1)\hat{z}) \frac{dv_0}{nv_0}.$$

Par le lemme 3.2.1, cela donne un prolongement de la structure transversalement projective pour  $\tilde{\mathcal{F}}$  donnée dans [Cou12], ce que nous recherchions.

Pour comprendre comment se comporte ce prolongement sur  $\tilde{X}_{n,q}$ , voyons comment  $v_0$  se prolonge dans les cartes  $(u_i, v_i)$ . Vu que les changements entre deux cartes successives sont de la forme

$$\begin{cases} u_i = u_{i+1}^{\alpha_i} v_{i+1}^{\gamma_i} \\ v_i = u_{i+1}^{\beta_i} v_{i+1}^{\delta_i} \end{cases}$$

avec  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{Z}$ , on a  $v_0 = u_i^{p_i} v_i^{q_i}$  et  $u_0 = u_i^{m_i} v_i^{n_i}$  avec  $p_i, q_i, m_i$  et  $n_i$  entiers. Dans la carte  $(u_i, v_i)$ , la structure transversalement projective de  $\tilde{\mathcal{F}}$  est donc donnée par

$$\hat{\sigma} = \{\hat{z} = \infty\}, d\hat{z} = (\hat{z}^2 u_i^{p_i} v_i^{q_i} - (n-1)\hat{z}) \left( \frac{p_i}{n} \frac{du_i}{u_i} + \frac{q_i}{n} \frac{dv_i}{v_i} \right).$$

On veut connaître les exposants  $\theta_{u_i} = \frac{(n-1)p_i}{n}$  et  $\theta_{v_i} = \frac{(n-1)q_i}{n}$  correspondant à  $u_i = 0$  et  $v_i = 0$ , notamment afin de voir si cette structure a des pôles apparents. Pour ce faire, on remarque

$$\begin{bmatrix} m_{i+1} & p_{i+1} \\ n_{i+1} & q_{i+1} \end{bmatrix} = A_i \begin{bmatrix} m_i & p_i \\ n_i & q_i \end{bmatrix} = \prod_{j=0}^i A_j,$$

où

$$A_{2k} = \begin{bmatrix} -1 & b_{2k+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } A_{2k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{2k+2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite on montre le lemme suivant qui contient tout ce dont nous aurons besoin sur les entiers  $m_i, n_i, p_i$  et  $q_i$ .

**Lemme 3.3.1.** — *Soient, pour  $1 \leq k \leq e$ ,  $t_k$  et  $w_k$  les deux entiers naturels premiers entre eux tels que  $\frac{t_k}{w_k} \leftrightarrow [b_1, \dots, b_k]$  soit la  $k$ -ième réduite de  $\frac{n}{q}$ . Alors on a,*

1. *pour  $2 < k \leq e$ ,  $\begin{cases} t_k = b_k t_{k-1} - t_{k-2}; \\ w_k = b_k w_{k-1} - w_{k-2}; \end{cases}$*
2. *pour  $i \geq 1$ ,  $t_{i+1} > t_i$  ;*
3. *pour  $i \geq 1$ ,  $p_{2i+2} = p_{2i+1} = t_{2i+1}$  et  $q_{2i+1} = q_{2i} = t_{2i}$  ;*
4. *si  $i > 0$ , alors  $p_i > 0$  et  $q_i > 0$ .*
5. *pour  $i \geq 1$ ,  $m_{2i+2} = m_{2i+1} = -w_{2i+1}$  et  $n_{2i+1} = n_{2i} = -w_{2i}$  ;*

*Démonstration.* — 1. C'est une variante de la preuve de la relation de récurrence pour les fractions continues standard, voir [Bak84, p 45].

2. On le voit par récurrence, en utilisant 1. et  $b_i \geq 2$ .
3. Par récurrence et en utilisant 1.

4. On utilise 2. et 3. ainsi que les remarques suivantes

$$t_1 = b_1 > 0, q_1 = 1 > 0.$$

5. Comme 3. Par récurrence et en utilisant 1.

□

Pour trouver la structure transverse minimale de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , on fait le changement de variable méromorphe  $z = \hat{z}v_0$  (global,  $v_0$  est prolongée holomorphiquement à  $\tilde{X}_{n,q}$ ), ainsi on décolle la section des singularités du feuilletage; en effet on obtient la structure donnée sur le fibré trivial par

$$\sigma = \{z = \infty\}, dz = (z^2 - z) \frac{dv_0}{nv_0}.$$

Les exposants deviennent  $\theta_{u_i} = \frac{p_i}{n}$  et  $\theta_{v_i} = \frac{q_i}{n}$ .

Grâce au lemme, on voit que seule la dernière carte contient un pôle apparent. Pour le voir, supposons  $e = 2i$ , le cas où  $e$  est impair étant similaire. Comme  $\frac{t_e}{w_e} = \frac{n}{q}$ ,  $q_{2i} = t_e = n$  et, si  $k \neq e$ ,  $q_k < n$  et pour tout  $k$ ,  $p_k < n$ . Ainsi le seul exposant entier est  $\theta_{v_e} = 1$ . On chasse le pôle apparent  $v_e$  en faisant une transformation élémentaire en  $z = 1$  au dessus de  $v_e = 0$ .

Nous venons d'obtenir l'énoncé suivant.

**Proposition 3.3.2.** — Soit  $D = \begin{cases} \{v_e = 0\} & \text{si } e \text{ est paire,} \\ \{u_e = 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$

La structure transverse minimale du feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  restreint à  $\tilde{X}_{n,q}$  est donnée sur le fibré  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\tilde{X}_{n,q}} \oplus \mathcal{O}_{\tilde{X}_{n,q}}(-D))$  avec une section holomorphe qui est la projection de  $\mathcal{O}_{\tilde{X}_{n,q}}$ .

Prolongeons cette discussion pour montrer ce qui suit.

**Lemme 3.3.3.** — Les singularités de  $\tilde{\mathcal{F}}$  sont réduites.

*Démonstration.* — Dans [Cou12], on a vu que la preuve se réduisait à montrer cela au voisinage des chaînes de Hirzebruch-Jung. Dans notre modèle local,  $\tilde{\mathcal{F}}$  est défini par le prolongement de  $dv_0$  à  $\tilde{X}_{n,q}$ . D'après le lemme 3.3.1, dans les cartes  $(u_i, v_i)_{i>0}$ ,  $dv_0$  se prolonge en  $d(u_i^{p_i} v_i^{q_i}) = u_i^{p_i} v_i^{q_i} (p_i \frac{du_i}{u_i} + q_i \frac{dv_i}{v_i})$  avec  $p_i > 0$  et  $q_i > 0$ . Le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  est donc défini par la forme holomorphe à zéros isolés  $\omega_i^{\tilde{\mathcal{F}}} = p_i v_i du_i + q_i u_i dv_i$ . Si  $i > 0$ , alors on obtient que la seule singularité de  $\tilde{\mathcal{F}}$  dans la carte  $(u_i, v_i)$  est d'indice  $\lambda = -\frac{p_i}{q_i} < 0$  donc réduite, ce qui conclut la preuve.

□

On a aussi, avec les notation précédentes, un autre résultat mentionné dans [Cou12].

**Lemme 3.3.4.** — *Les feuilletages  $\tilde{\mathcal{F}}$  et  $\tilde{\mathcal{G}}$  n'ont que des contacts simples dans  $\tilde{X}_{n,q}$ , exactement sur les axes de coordonnées  $\{v_0 = 0\}$ ,  $\{u_e v_e = 0\} \setminus D$  et  $(\{u_i = 0\}, \{v_i = 0\})_{0 < i < e}$ .*

*Démonstration.* — Déterminons d'abord l'équation de  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Le feuilletage défini par  $dy = 0$  se projette sur le "feuilletage"  $ds_e = 0$  sur  $X_{n,q}$  ( $i_e = 0, k_e = q, j_e = n$ , cf [Rie74, p 215]) et se relève en  $\tilde{\mathcal{G}}$  défini par  $d(u_0^{j_e} v_0^{k_e}) = 0$ . Ainsi,  $\tilde{\mathcal{G}}$  est défini par  $d(u_0^n v_0^q) = 0$ . Dans la carte  $(u_i, v_i)$ , le feuilletage  $\tilde{\mathcal{G}}$  est donc défini par la forme holomorphe  $\omega_i^{\tilde{\mathcal{G}}} = v_i(m_i n + p_i q) du_i + u_i(n_i n + q_i q) dv_i$ . La forme  $\omega_i^{\tilde{\mathcal{G}}}$  n'est pas à zéros isolés si et seulement si  $\frac{n}{q} = -\frac{p_i}{m_i}$  ou  $\frac{n}{q} = -\frac{n_i}{q_i}$ . Comme  $\frac{n_i}{-q_i}$  et  $\frac{p_i}{-m_i}$  sont des réduites de  $\frac{n}{q}$  (cf lemme), cette dernière condition n'est réalisée que pour  $i = e$ . Ainsi si  $0 < i < e$ , puisque  $\tilde{\mathcal{F}}$  est donné par la forme holomorphe à zéros isolés  $\omega_i^{\tilde{\mathcal{F}}} = p_i v_i du_i + q_i u_i dv_i$ , le diviseur de tangence entre  $\tilde{\mathcal{F}}$  et  $\tilde{\mathcal{G}}$  est décrit dans la carte  $(u_i, v_i)$  comme le diviseur des zéros de

$$\omega_i^{\tilde{\mathcal{F}}} \wedge \omega_i^{\tilde{\mathcal{G}}} = n(m_i q_i - n_i p_i) u_i v_i dv_i \wedge du_i.$$

Cette 2-forme n'est pas identiquement nulle, puisque  $\frac{p_i}{-m_i}$  et  $\frac{q_i}{-n_i}$  sont deux réduites successives (donc distinctes) de  $\frac{n}{q}$ , et s'annule donc avec multiplicité exactement 1 exactement sur  $u_i v_i = 0$ . Le calcul dans les cartes  $(u_0, v_0)$  et  $(u_e, v_e)$  se fait sans difficulté.  $\square$

On décrit maintenant ce qui se passe au voisinages des cycles de courbes rationnelles employés pour compactifier les cusps.

### 3.3.2. Au voisinage des cusps. —

**Remarque 3.3.5.** — Dans les premières versions de [Cou12], on a annoncé qu'on pouvait prolonger la structure transverse de tout feuilletage modulaire (au sens de Brunella [Bru03b]) au voisinage des cusps, la preuve que nous avons ici ne fonctionne que pour les surfaces modulaires construites avec un réseau  $\Gamma$  commensurable à un réseau  $\Gamma_K$ , avec  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  un corps quadratique totalement réel et pour les réseaux irréductibles cocompacts. Par les travaux de Margulis sur l'arithmétique des réseaux, tout réseau (sous groupe discret de covolume fini) de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$  irréductible ([Bru03b]) non cocompact est commensurable à un  $\Gamma_K$ . La définition de Brunella ne mentionne pas l'hypothèse de covolume fini, toutefois il semble que la propriété de "bonne compactification" demandée sur la surface garantisse que le groupe soit un réseau; il serait bon de confirmer ce fait.

On se réfère ici à Hirzebruch [Hir73, §§2.2 – 2.4 pp 204 – 215]. Supposons donc que  $\Gamma$  est commensurable à un  $\Gamma_K$  comme dans la remarque. Alors  $\Gamma$  satisfait la condition (F) de Shimizu [Hir73, p 17] et les bouts  $b_x$  de  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma$  correspondent aux points  $x$  de  $\text{bord}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{H}) \times \text{bord}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{H}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})^2$  qui ont un stabilisateur  $\Gamma_x$  non trivial sous l'action de  $\Gamma$ . La classe d'un tel  $x$  pour l'action de  $\Gamma$  est appelée un "cusp". Il y a un nombre fini de cusps, puisqu'il en est ainsi pour  $\Gamma = \Gamma_K$  (alors le nombre de cusps est le nombre de classes de  $K$ ). Compactifions  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma$  en  $\overline{(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma}$  en ajoutant un point  $p_x$  pour chaque bout  $b_x$ . Si l'on décide que le faisceau  $\mathcal{O}$  des fonctions holomorphes sur  $\overline{(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma}$  est le prolongement de celui de  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma$  obtenu en disant que les fibres  $\mathcal{O}_p$  satisfont

$$\mathcal{O}_p = \{\text{germes de fonctions continues en } p \text{ holomorphes en dehors de } p\},$$

alors on munit  $\overline{(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma}$  d'une structure de surface projective à singularités normales. De même, pour tout cusp  $x$ , le compactifié d'Alexandrov

$$\overline{\mathbb{H}^2/\Gamma_x} = \mathbb{H}^2/\Gamma_x \cup \{\infty\}$$

de  $\mathbb{H}^2/\Gamma_x$  est muni d'une structure de surface complexe normale.

Pour tout stabilisateur  $\Gamma_x \neq \{1\}$  d'un  $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})^2$ , il existe  $\rho \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})^2$  satisfaisant  $\rho(x) = ([0 : 1], [0 : 1]) = (\infty, \infty)$  et  $\rho\Gamma\rho^{-1} = G(M, V)$  où

$$G(M, V) = \{(z_1, z_2) \mapsto (\epsilon^{(1)}z_1 + \mu^{(1)}, \epsilon^{(2)}z_2 + \mu^{(2)}) \mid \epsilon \in M, \mu \in V\},$$

avec :

- $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module complet d'un corps quadratique totalement réel  $k$  (i.e  $M$  est un sous  $\mathbb{Z}$ -module de rang 2 de  $k$ ),
- $V$  un sous-groupe de rang 1 de  $U_M^+ := \{\mu \text{ unité totalement positive de } k \mid \mu M = M\}$ .
- $(x \mapsto x^{(i)})_{i=1,2}$  les deux plongements de  $k$  dans  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, au voisinage de  $p_x$ ,  $(\overline{\mathbb{H}^2/\Gamma}, p_x)$  est isomorphe à  $(\overline{\mathbb{H}^2/G(M, V)}, \infty)$ .

Si  $G(M_1, V)$  et  $G(M_2, V)$  sont deux groupes de ce type (associés au même  $k$ ) satisfaisant  $\alpha M_1 = M_2$ , pour  $\alpha$  une unité totalement positive de  $k$ , alors  $\mathbb{H}^2/G(M_1, V)$  et  $\mathbb{H}^2/G(M_2, V)$  sont isomorphes, et on dit que  $G(M_1, V)$  et  $G(M_2, V)$  sont équivalents, puisque leurs actions sont conjuguées par  $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$ . De plus, tout tel  $G(M_1, V)$  est équivalent à  $G(M_2, V)$  avec  $M_2 = \mathbb{Z}w_0 + \mathbb{Z}$  pour un  $w_0 \in k$  satisfaisant  $0 < w_0^{(2)} < 1 < w_0^{(1)}$ . Alors le développement en fraction continue<sup>(1)</sup> de  $w_0 = w_0^{(1)}$  est périodique :  $w_0 \leftrightarrow [b_0, \dots, b_{r-1}, b_0, \dots]$  ;

1. Comme à la section précédente.

on suppose ici que la période minimale est bien de longueur  $r$ . Alors  $V$  est un sous groupe d'indice fini de  $U_M^+$  et on a le théorème suivant :

**Théorème 3.3.6 (Hirzebruch).** — *Soit  $k$  un corps quadratique réel et  $M = \mathbb{Z}w_0 + \mathbb{Z}$  un  $\mathbb{Z}$ -module complet de  $k$  comme précédemment ; avec*

$$w_0 \leftrightarrow [b_0, \dots, b_{r-1}, b_0, \dots],$$

*de période minimale de longueur  $r$ . Soit  $V$  un sous groupe d'indice  $a$  de  $U_M^+$ . Alors la désingularisation de  $\overline{\mathbb{H}^2/G(M, V)}$  est donnée par  $X \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2/G(M, V)}$  qui contracte un cycle de  $r$  courbes rationnelles d'autointersections données par le cycle  $(-b_0, \dots, -b_{r-1})^a$ .*

Dans ce qui suit on décrit  $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/G(M, V)$  et cette application  $X \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2/G(M, V)}$  dans le même esprit qu'à la section précédente. La conjugaison de  $\Gamma_x$  à  $G(M, V)$  préserve la structure produit de  $\mathbb{H}^2$ . La structure transverse  $dz = 0, \sigma = \{z = x\}$  sur  $\mathbb{H}^2$  s'écrit après conjugaison sous la forme  $dz = 0, \sigma = \{z = \alpha x\}$ , ce qui revient à  $dz = 0, \sigma = \{z = x\}$  en changeant de coordonnée  $z$ .

Hirzebruch construit d'abord une surface complexe lisse  $Y$  par le même type de formules que dans la section précédente : on recolle des copies  $R_k$  de  $\mathbb{C}^2$  : les coordonnées de  $R_k$  sont appelées  $(u_k, v_k)$  et les recollements sont

$$u_{k+1} = u_k^{b_k} v_k, \quad v_{k+1} = 1/u_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Remarque 3.3.7.** — On ne reprend pas les mêmes formules qu'à la section précédente pour conserver les mêmes notations que celles utilisées initialement par Hirzebruch.

On a, dans la veine de la section précédente, des entiers  $\tau_j, \mu_j, \kappa_j, \nu_j$ , tels que  $u_0 = u_j^{\tau_j} v_j^{\mu_j}$  et  $v_0 = u_j^{\kappa_j} v_j^{\nu_j}$ . Soit  $S_k$  la courbe sur  $Y$  définie par  $u_{k+1} = 0, v_k = 0$ .

Hirzebruch pose

$$w_k \leftrightarrow [b_k, \dots, b_{k+r-1}, b_k, \dots] \text{ et } A_0 = 1, A_k = w_k A_{k-1}, k \in \mathbb{Z}.$$

On a alors  $V = \langle A_r \rangle$ . Il considère ensuite l'application

$$\begin{aligned} \Phi : Y \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S_j &\longrightarrow \mathbb{C}^2/M \\ (u_0, v_0) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

$$\text{où } 2i\pi x = w_0^{(1)} \log u_0 + \log v_0 \text{ et } 2i\pi y = w_0^{(2)} \log u_0 + \log v_0.$$



Notons que les coordonnées  $(u_0, v_0)$  donnent une carte globale sur  $Y \setminus \cup_{j \in \mathbb{Z}} S_j$ . Dans toute autre carte  $R_k$ , on a en fait

$$2i\pi x = A_{k-1}^{(1)} \log u_0 + A_k^{(1)} \log v_0 \text{ et } 2i\pi y = A_{k-1}^{(2)} \log u_0 + A_k^{(2)} \log v_0.$$

Si on pose  $\tilde{z} = 1/(z - x)$ , on obtient un représentant birationnel de

$$dz = 0, \sigma = \{z = x\}$$

qui est donné par

$$d\tilde{z} = \tilde{z}^2 dx, \tilde{\sigma} = \{\tilde{z} = \infty\},$$

dont on constate qu'il se prolonge à  $\mathbb{C}^2$  de façon invariante par  $M$ ; on obtient sur  $\Phi^{-1}(\mathbb{C}^2/M) \cap R_k$  la structure  $\Sigma_k$  :

$$d\hat{z} = \hat{z}^2 (A_{k-1} \frac{du_k}{2i\pi u_k} + A_k \frac{dv_k}{2i\pi v_k}), \hat{\sigma} = \{\hat{z} = \infty\}.$$

On voit que cette structure se prolonge logarithmiquement à  $Y$  sur le fibré trivial, on appelle  $\Sigma$  le prolongement commun des  $\Sigma_k$ .

Posant ensuite  $Y^+ = \Phi^{-1}(\mathbb{H}^2/M) \cup (\cup_j S_j)$ , il définit une action de  $V = \langle A_r \rangle$  sur  $Y^+$  par

$$\begin{aligned} A_r : \quad R_k &\longrightarrow R_{k+r} \\ (u_k, v_k) &\longmapsto (u_{k+r}, v_{k+r}) = (u_k, v_k) \end{aligned}$$

et il montre que cette action est compatible avec celle de  $V$  sur  $\mathbb{H}^2/M$ .

Sur  $R_k$ , utilisons  $z_k = A_k \hat{z}$ , dans cette coordonnée  $\Sigma_k$  s'écrit :

$$dz_k = z_k^2 \left( \frac{1}{w_k} \frac{du_k}{2i\pi u_k} + \frac{dv_k}{2i\pi v_k} \right), \hat{\sigma} = \{z_k = \infty\}.$$

Puisque  $(w_k)$  est périodique, on peut ainsi prolonger l'action de  $V$  sur  $Y^+$  en une action sur  $Y^+ \times \mathbb{P}^1$  par automorphismes de la structure  $\Sigma$  en fixant

$$\begin{aligned} A_r : \quad R_k \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow R_{k+r} \times \mathbb{P}^1 \\ (u_k, v_k, z_k) &\longmapsto (u_{k+r}, v_{k+r}, z_{k+r}) = (u_k, v_k, z_k). \end{aligned}$$

Par le lemme 3.2.1, Le quotient de  $\Sigma$  par cette action prolonge la structure construite dans [Cou12]. Ainsi, on a une structure transversalement projective pour les feuilletages modulaires de Hilbert, conformément à ce qu'on a annoncé.

On peut déduire de cette section l'énoncé suivant.

**Théorème 3.3.8.** — *La structure transverse minimale  $(\mathcal{R}, \sigma)$  de tout feuilletage modulaire de Hilbert  $\mathcal{F}$  est donnée par un feuilletage de Riccati à pôles logarithmiques dont les exposants  $\theta$  sont des rationnels contenus dans  $] -1, 1[$ .*

*La section  $\sigma$  est holomorphe et elle rencontre les singularités de  $\mathcal{R}$  exactement au dessus des singularités de  $\mathcal{F}$  qui ne sont pas à l'intersection de deux de ses courbes rationnelles invariantes.*

*Démonstration.* — Pour voir la dernière assertion, il suffit d'utiliser notre description dans la carte  $(u_e, v_e)$  de la structure transverse minimale au voisinage des chaînes de Hirzebruch-Jung donnée dans la discussion avant la proposition 3.3.2. □



## CHAPITRE 4

### UN EXEMPLE DE FEUILLETAGE MODULAIRE

On donne ici le contenu de [Cou12] avec quelques légères modifications.

*À la mémoire de Marco Brunella.*

#### 4.1. Introduction

Les feuilletages modulaires sont des feuilletages naturels sur les quotients du bidisque par des sous-groupes discrets irréductibles  $\Gamma$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Ils sont induits par les feuilletages horizontaux et verticaux du bidisque et sont naturellement munis de structures transversalement projectives. On peut se donner un tel  $\Gamma$  par le choix d'un nombre réel quadratique, voir section 2.1. Dans une classification récente de Brunella, Mc Quillan et Mendes, parmi les feuilletages sur les surfaces projectives, les feuilletages modulaires sont caractérisés par leurs dimensions de Kodaira :  $\mathbf{kod} = -\infty$  et  $\nu = 1$  ; ce sont deux invariants numériques codant les propriétés de tangence du feuilletage. Dans [MP05], Mendes et Pereira donnent les premiers exemples de modèles birationnels explicites pour des feuilletages modulaires. La découverte de ces feuilletages est fondée sur une bonne connaissance de la surface sous-jacente. Il apparaît que les structures transversalement projectives de deux de ces exemples (les feuilletages  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_3$  associés à  $\sqrt{5}$  dans [MP05]) correspondent à des déformations isomonodromiques de feuilletages de Riccati à quatre pôles sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , c'est à dire à deux solutions de l'équation de Painlevé VI (PVI). Ces solutions sont, par construction, algébriques ; elles sont des transformées d'Okamoto de solutions icosaédrales de Dubrovin-Mazzocco

[DM00], les solutions n°31 et 32 de la liste de Boalch [Boa06]. L'objectif principal de cet article est de produire un exemple de feuilletage modulaire en inversant cette construction : le choix d'une solution de l'équation de Painlevé VI donne un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur un  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $P \rightarrow S$ ; en choisissant une section de ce fibré, on se donne un feuilletage transversalement projectif  $\mathcal{F}$  sur la surface  $S$ ; on souhaite que ce dernier soit un feuilletage modulaire. Le choix de la solution de (PVI) est bien sûr guidé par les propriétés des feuilletages modulaires : on a des contraintes sur la monodromie de  $\mathcal{R}$  et, d'après Touzet [Tou03, Théorème III.2.6.],  $\mathcal{F}$  ne doit pas être pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}_0$  sur une surface algébrique. Cherchant à obtenir un des feuilletages modulaires sur la surface rationnelle associée à  $\sqrt{3}$ , on a ainsi été conduit sans ambiguïté à la solution utilisée à la section 4.3. Une fois construit un tel feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$ , une façon d'augmenter ses chances de succès est de se rappeler le Lemme III.2.8. de [Tou03] : si  $\tilde{\mathcal{H}} = r^*\mathcal{H}$  avec  $r$  une application rationnelle, alors  $\mathbf{kod}(\mathcal{H}) \leq \mathbf{kod}(\tilde{\mathcal{H}})$ ; on a donc intérêt à quotienter  $\mathcal{R}$  par ses symétries avant de choisir une section, ce que nous faisons ici. Cette entreprise a été couronnée de succès.

**Théorème 4.1.1.** — *La surface bifeuilletée  $(\mathbb{P}^2, \{\mathcal{F}_\omega, \mathcal{G}_\tau\})$  est un modèle birationnel d'une surface modulaire de Hilbert munie de ses feuilletages modulaires, où*

$$\omega = -12y(1+3y)(3x-y)dx + [(10-18x)y^2 - 9x(18x-5)y - 9x^2(9x-2)]dy$$

et

$$\tau = -12y(1+3y)(12x-y-3)dx + [(4-18x)y^2 - 3(18x-1)(3x-1)y + 9x(2-9x)(x-1)]dy.$$

De plus, l'involution birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  suivante échange  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ .

$$\sigma : (x, y) \mapsto \left( \frac{3y(3y+13)x - y(7y+9)}{(135y+9)x - 3y(3y+13)}, y \right).$$

La preuve de ce théorème est fondée sur un calcul de dimensions de Kodaira.

Après un revêtement double, on obtient les feuilletages modulaires construits en faisant agir  $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$  sur le bidisque (voir théorème 4.9.1).

Dans [CS08, Theorem 2 p 1273], Corlette et Simpson établissent un résultat de factorisation pour certaines représentations  $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  de groupes fondamentaux de variétés quasi-projectives : si la représentation ne se factorise pas par une courbe, alors elle est pull-back par une application  $f : X \rightarrow Y$  d'une des représentations tautologiques d'un quotient  $Y$  d'un polydisque. Ils manifestent leur intérêt pour la détermination d'une telle application  $f$  pour les représentations de monodromie des feuilletages de Riccati

obtenus à partir de solutions algébriques de (PVI). C'est ce que nous avons fait ici pour notre feuilletage initial  $\mathcal{R}$ , avec  $Y$  une surface modulaire.

Pour les propriétés générales des feuilletages sur les surfaces on se réfère à [Bru00]. Pour des propriétés particulières des feuilletages modulaires, on pourra consulter [MP05]. Pour les notions relatives aux feuilletages transversalement projectifs, on recommande [LP07] et [CLNL<sup>+</sup>07]. Pour une introduction aux connexions logarithmiques plates, voir [NY02]. Enfin, pour les calculs de groupes fondamentaux, on propose [Shi].

Par commodité, on a employé fréquemment un logiciel de calcul formel pour nos discussions. Toutefois, ce recours au calcul formel ne s'avère absolument nécessaire que pour ce qui est décrit à la section 4.4.

L'auteur tient à remercier chaleureusement son directeur de thèse Frank Loday ainsi que Jorge Pereira pour leurs nombreuses indications. Remerciements également aux membres de l'équipe de géométrie analytique de l'IRMAR, à Philip Boalch, Serge Cantat, Slavyana Geninska et à Pierre Py. On remercie aussi le CNRS pour son financement de thèse, l'IRMAR pour son accueil permanent et l'IMPA pour un séjour fructueux.

## 4.2. Préliminaires

**4.2.1. Surfaces modulaires, feuilletages modulaires.** — Les surfaces modulaires de Hilbert ont été introduites par Hilbert, compactifiées en des surfaces projectives par Baily-Borel et désingularisées par Hirzebruch (cf [Hir73] et [vdG88]). Soit  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  avec  $d \in \mathbb{N}$  sans facteur carré. Soit  $\mathcal{O}_K$  l'anneau d'entiers de  $K$ . Les deux plongements de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  induisent deux plongements de  $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K)$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  :  $\gamma \mapsto A$  et  $\gamma \mapsto \bar{A}$ , où  $A \mapsto \bar{A}$  est l'action du groupe de Galois de  $K$ . On obtient un plongement  $i : \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2, \gamma \mapsto (A, \bar{A})$ .

**Définition 4.2.1.** — Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$  commensurable à  $i(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K))$ . Le quotient  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma$  est une surface complexe à singularités de Hirzebruch-Jung qui se compactifie en une surface projective par adjonction de cycles de courbes rationnelles (cusps). La compactification en question est appelée surface modulaire de Hilbert et notée  $Y_\Gamma$ . Si  $\Gamma = i(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K))$ , on pourra noter  $Y_\Gamma = Y_{\sqrt{d}}$ .

Dans son article [Bru03a], Brunella définit des objets plus généraux.

**Définition 4.2.2 (Brunella).** — Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$  non commensurable à un produit  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$  de sous-groupes de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  et tel

que  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma$  est compact ou se compactifie en une surface projective comme les surfaces précédentes. La surface ainsi compactifiée  $\overline{(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma}$  est appelée surface modulaire et notée  $Y_\Gamma$ .

**Définition 4.2.3.** — Les feuilletages modulaires de  $Y_\Gamma$  sont les images des feuilletages verticaux et horizontaux de  $\mathbb{H}^2$ . On les note  $(\mathcal{F}_\Gamma, \mathcal{G}_\Gamma)$ . Si  $Y_\Gamma$  est une surface modulaire de Hilbert, alors  $\mathcal{F}_\Gamma$  et  $\mathcal{G}_\Gamma$  sont appelés feuilletages modulaires de Hilbert.

La surface modulaire  $(Y_\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma, \mathcal{G}_\Gamma)$  se désingularise en  $(\tilde{Y}_\Gamma, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma, \tilde{\mathcal{G}}_\Gamma) \rightarrow (Y_\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma, \mathcal{G}_\Gamma)$  en remplaçant ses singularités par des chaînes de courbes rationnelles, les chaînes de Hirzebruch-Jung, c'est un travail de Hirzebruch [Hir53]. Le résultat suivant est connu, on le donne pour utilisation ultérieure.

**Théorème 4.2.4.** — Soit  $Y_\Gamma$  une surface modulaire.

1. Les feuilletages  $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$  et  $\tilde{\mathcal{G}}_\Gamma$  sont à singularités réduites et minimaux au sens de [Bru00].
2. De plus leur diviseur de tangence est réduit et son support est la réunion des chaînes de Hirzebruch-Jung et des cycles de courbes rationnelles.

*Démonstration.* — Il suffit de voir que les singularités de  $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$  sont réduites et que  $\tilde{\mathcal{F}}$  est relativement minimal, d'après [Bru00, Theorem 1 p 75] et sa preuve. D'après la discussion [Bru00, pp 134 – 135], les courbes algébriques irréductibles invariantes par  $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$  sont seulement les composantes des chaînes et cycles cités plus haut et, sur les cycles, la tangence entre les feuilletages est simple et les singularités sont réduites. Sur les chaînes de Hirzebruch-Jung, le fait que les singularités soient réduites et la tangence simple peut se voir par un calcul aisé à l'aide des descriptions locales explicites de  $\mathbb{H}^2 \rightarrow Y_\Gamma$  et de  $\tilde{Y}_\Gamma \rightarrow Y_\Gamma$  données dans [Rie74, §3 pp 220 – 223].

Comme les composantes des chaînes et des cycles sont d'auto-intersection inférieure à  $-2$ , le feuilletage est relativement minimal.  $\square$

Les feuilletages modulaires sont naturellement munis d'une structure transversalement projective.

**4.2.2. Feuilletages transversalement projectifs, feuilletages de Riccati.** — La définition suivante est due à [LP07] et équivalente à celle de [Scá97].

**Définition 4.2.5.** — Soit  $\mathcal{H}$  un feuilletage de codimension 1 sur une variété complexe lisse  $M$ . Une **structure transversalement projective** (singulière) pour  $\mathcal{H}$  est la donnée d'un triplet  $(\pi, \mathcal{R}, \sigma)$  consistant en

1. un fibré en  $\mathbb{P}^1$  localement trivial  $\pi : P \rightarrow M$  ;
2. un feuilletage holomorphe singulier  $\mathcal{R}$  de codimension 1 sur  $P$  transverse à la fibre générique de  $\pi$  et
3. une section méromorphe  $\sigma$  de  $\pi$  telle que  $\mathcal{H} = \sigma^*\mathcal{R}$ .

En présence des conditions 1 et 2, on dit que  $\mathcal{R}$  est un **feuilletage de Riccati** sur le fibré  $\pi$ .

**Définition 4.2.6.** — Soit  $\mathcal{R}$  un feuilletage de Riccati sur  $\pi$ , si  $D$  est un diviseur de  $M$  tel que  $\mathcal{R}|_{M \setminus D}$  est transverse aux fibres de  $\pi|_{M \setminus D}$ , par compacité des fibres, en relevant les lacets de  $M \setminus D$  dans les feuilles de  $\mathcal{R}$ , on peut définir une représentation  $\pi_1(M \setminus D, *) \rightarrow \text{Aut}(\pi^{-1}(*))$ . Si  $D$  est le plus petit diviseur ayant cette propriété, on l'appelle le **lieu polaire** de  $\mathcal{R}$  et la représentation est appelée **représentation de monodromie** de  $\mathcal{R}$ .

En pratique, on doit choisir une coordonnée sur  $\pi^{-1}(*)$  et la monodromie est donnée par des éléments de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ .

On définit une relation d'équivalence naturelle entre feuilletages de Riccati.

**Définition 4.2.7.** — Soit  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  deux feuilletages de Riccati sur  $\mathbb{P}^1 \times M \rightarrow M$ . On dit que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont **birationnellement équivalents** si il existe une **transformation de jauge méromorphe**

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^1 \times M &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times M \\ (z, x) &\longmapsto (A(x).z, x) \end{aligned}$$

avec  $A : M \dashrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  méromorphe, de sorte qu'on ait  $\phi^*\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ .

Le résultat suivant explique notre intérêt pour la notion de feuilletage transversalement projectif.

**Lemme 4.2.8.** — Soit  $Y_\Gamma$  une surface modulaire. Soit  $X$  le complémentaire dans  $\tilde{Y}_\Gamma$  des cycles de courbes rationnelles apparus dans le processus de compactification de  $Y_\Gamma$ . Soit  $\Gamma_i$  la projection de  $\Gamma$  sur le  $i$ -ème facteur de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})^2$ . Les feuilletages  $\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma|X}$  et  $\tilde{\mathcal{G}}_{\Gamma|X}$  sur  $X$  possèdent des structures transversalement projectives de monodromies respectives  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Si  $Y_\Gamma$  est une surface modulaire de Hilbert ces structures se prolongent à tout  $\tilde{Y}_\Gamma$ .



*Démonstration.* — Il suffit de faire la preuve pour  $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ . On construit d'abord la structure au dessus du complémentaire  $X$  des chaînes et des cycles. Soit  $\mathcal{U} \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$  le complémentaire des points à stabilisateurs non triviaux pour l'action de  $\Gamma$  et  $(u_1, u_2)$  son point courant. Cet ouvert  $\mathcal{U}$  est le revêtement universel de  $X$  : on obtient  $X$  comme quotient de  $\mathcal{U}$  par l'action de  $\Gamma$ . Soit  $\sigma = \{z = u_1\}$  une section de  $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ . En fixant  $(z, u) \cdot \gamma = (z \cdot \gamma_1, u \cdot \gamma)$  pour tout  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$  et tout  $(z, u) \in \mathbb{P}^1 \times \mathcal{U}$ , on définit une action proprement discontinue de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U}$ . Le quotient  $P = (\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U})/\Gamma$  est muni d'une structure de  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi : P \rightarrow X$  dont une section holomorphe  $\tilde{\sigma}$  est induite par  $\sigma$ . De surcroît, le feuilletage de Riccati sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U}$  défini par  $dz = 0$  passe au quotient et fournit un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  de telle sorte que  $(\pi, \mathcal{R}, \tilde{\sigma})$  soit une structure transversalement projective pour la restriction de  $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$  à  $X$ . Par construction cette structure a pour monodromie la projection  $\Gamma_1$  de la représentation tautologique du quotient  $\mathcal{U}/\Gamma$ .

Ensuite, on prolonge  $(\pi, \mathcal{R}, \tilde{\sigma})$  au voisinage des chaînes de Hirzebruch-Jung en utilisant [Rie74]. De même, si  $Y_\Gamma$  est une surface modulaire de Hilbert, on étend  $(\pi, \mathcal{R}, \tilde{\sigma})$  au voisinage des cycles de courbes rationnelles invariantes à l'aide de la description locale de [Hir73, §§2.2 – 2.4 pp 204 – 215].  $\square$

Pour se donner un feuilletage de Riccati, on peut utiliser une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI.

#### 4.2.3. Équation de Painlevé VI et déformations isomonodromiques.

— Les solutions de l'équation de Painlevé VI (PVI) gouvernent les déformations isomonodromiques à un paramètre  $(\nabla_s)_{s \in U}$  des connexions logarithmiques de rang 2 à trace nulle et à 4 pôles sur  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Les connexions plates  $(\nabla_s)$  sont les restrictions d'une connexion plate logarithmique  $\nabla$  sur  $\mathbb{C}^2 \times U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow U \times \mathbb{P}^1$ . On s'intéresse ici aux déformations qui correspondent aux solutions algébriques de (PVI). Dans ce cas l'espace des paramètres est  $U = \mathcal{C} \setminus \{s_1, \dots, s_n\}$  où  $\mathcal{C}$  est une surface de Riemann compacte et on peut compactifier la situation en prolongeant  $\nabla$  méromorphiquement à  $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ . La connexion  $\nabla$  est alors donnée par un système : si  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  est une section locale de  $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ , alors  $\nabla \cdot \sigma = d\sigma - \Omega \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$ , où  $\Omega = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2} & \alpha \\ -\gamma & -\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$  est une matrice de 1-formes méromorphes sur  $\mathcal{C}$ . Les sections locales horizontales de  $\nabla$  sont alors les solutions de  $dZ = \Omega \cdot Z$ . Si  $Z = (z_1, z_2)$  est une telle section alors  $\mathbb{P}(Z) = [z_1 : z_2] = [z : 1]$  est une

section locale de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$  telle que l'équation de Riccati  $dz = \alpha + \beta z + \gamma z^2$  soit satisfaite. La platitude de  $\nabla$  revient à l'intégrabilité de la forme  $\omega = -dz + \alpha + \beta z + \gamma z^2$  sur  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ , i.e.  $\omega$  définit un feuilletage holomorphe singulier sur  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$  qui est, par construction, un **feuilletage de Riccati**. On voit que ce dernier caractérise  $\nabla$  et on peut préférer son étude à celle du système  $dZ = \Omega.Z$ . Des formules donnant  $(\nabla_s)$  à partir d'une solution de (PVI) sont classiquement connues, voir par exemple [Boa07, pp 105 – 106] ou [LSS10, p 28]. Localement,  $t$  donne une cordonnée sur  $\mathcal{C} \setminus \{s_1, \dots, s_n\}$  et l'équation de Riccati correspondant à  $\nabla$  est donnée par  $dz = \sum_{i=0,1,t} \frac{P_i(z)}{x-i} dx + A(z)dt$  où  $P_i(z) = \alpha_i + \beta_i z + \gamma_i z^2$ . Les formules de [LSS10] donnent  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  en fonction de  $t$  mais nullement  $A$ . Par logarithmicité et platitude de  $\nabla$ , on peut toutefois déterminer  $A$  qui est de la forme  $A = -\frac{P_t}{x-t} + u + vz + wz^2$ . Dans le cas des solutions algébriques de (PVI),  $u, v, w, \alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  se prolongent en des fonctions méromorphes sur  $\mathcal{C}$ .

### 4.3. Solution de l'équation de Painlevé VI, une famille non pull-back

Suivant la démarche introduite dans la section précédente on va construire un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$  à partir d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. On notera  $(\mathcal{R}_s)$  la famille des restrictions de  $\mathcal{R}$  aux niveaux de la projection  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ . Ici  $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$  et la solution qu'on choisit est l'image de la solution tétraédrale n°6 de Boalch [Boa07] par une transformation d'Okamoto, la transformation  $s_\delta \circ s_\infty$  dans les notations de [LT08]. Donnons la solution et ses paramètres :  $q(s) = \frac{(s^6 + 15s^4 - 5s^2 + 45)s(s+1)(s-3)^2}{(5s^6 - 5s^4 + 135s^2 + 81)(s+3)(s-1)^2}$ ,  $t(s) = -\frac{(s+1)^3(s-3)^3}{(s-1)^3(s+3)^3}$ ,  $\theta_0 = -\frac{5}{6}$ ,  $\theta_1 = -1$ ,  $\theta_t = -1$ ,  $\theta_\infty = \frac{1}{6}$ . Une solution équivalente sous le groupe d'Okamoto a d'abord été donnée par [AK02].

Ayant en tête [Tou03, Théorème III.2.6.] (cf notre introduction) et pour nos besoins ultérieurs, on va montrer que cette solution algébrique de (PVI) ne correspond pas à une déformation isomonodromique  $(\mathcal{R}_s)_{s \in \mathbb{P}^1}$  de feuilletages de Riccati au dessus de  $\mathbb{P}^1$  obtenue par pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.

Précisons ce que l'on entend par là.

**Définition 4.3.1.** — On dit qu'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  sur le  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $\pi : \mathbb{P}^1 \times M \rightarrow M$  est **pull-back** (rationnel) d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}_0$  sur  $\pi' : \mathbb{P}^1 \times M' \rightarrow M'$  si il existe une application rationnelle dominante  $\phi : M \dashrightarrow M'$

$M'$  telle que  $\mathcal{R} = \phi^* \mathcal{R}_0$ . Dans le cas où  $M'$  est une courbe algébrique, on dit que  $\mathcal{R}$  est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.

Ici comme  $M = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ,  $\mathcal{R}$  ne peut être pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe que si cette dernière est la droite projective.

**Remarque 4.3.2.** — On va utiliser des modèles locaux. On indique comment ils se comportent quand on les tire en arrière par un revêtement.

- Si la monodromie en  $x = 0$  d'une équation de Riccati à pôle simple sur  $(\mathbb{C}, 0)$  est conjuguée à  $z \mapsto \lambda z$  alors, à transformation de jauge holomorphe près,  $z' = \phi(x).z$ ,  $\phi \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}\{x\})$ , l'équation est  $dz = \alpha \frac{dx}{x} z$ , avec  $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$ . Si  $x = y^k$ , on obtient  $dz = k\alpha \frac{dy}{y} z$ .
- Si la monodromie en  $x = 0$  d'une équation de Riccati à pôle simple sur  $(\mathbb{C}, 0)$  est conjuguée à  $z \mapsto z + 1$  alors, à transformation de jauge holomorphe près, l'équation est  $dz = (nz + x^n) \frac{dx}{x}$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $x = y^k$ , alors on obtient  $dz = k(nz + y^{kn}) \frac{dy}{y}$  et, en posant  $\tilde{y} = \sqrt[kn]{k} \cdot y$ , on obtient  $dz = (knz + \tilde{y}^{kn}) \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}}$ .

Dans les deux cas, l'exposant  $\alpha$  ou  $n$  est multiplié par l'indice de ramification  $k$ . Les paramètres  $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty)$  d'une solution de Painlevé sont les exposants qui décrivent le feuilletage  $\mathcal{R}_s$  au voisinage de  $x = 0, 1, t, \infty$ , respectivement. Quand  $\theta_i \in \mathbb{Z}$ , on doit avoir plus d'informations pour connaître la monodromie. Dans notre cas,  $\theta_i = -1$  correspond à une monodromie locale parabolique.

Revenons à notre démonstration. Raisonnons par l'absurde : soit  $\phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  une application rationnelle et  $\mu = -dz + \alpha + \beta z + \gamma z^2$  une équation de Riccati telle que  $\phi^* \mu$  donne notre déformation  $(\mathcal{R}_s)$  de paramètres  $\theta = (-\frac{5}{6}, -1, -1, \frac{1}{6})$ . On va étudier la restriction  $\phi_s$  de  $\phi$  à la valeur  $s$  du paramètre de la déformation. L'application  $\phi_s$  ne peut être constante pour un  $s$  générique, sous peine de ne pas avoir de monodromie pour  $\mathcal{R}_s$ . C'est donc que nous avons, pour  $s$  générique, un revêtement ramifié  $\phi_s : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

Pour obtenir les bonnes monodromies locales pour  $\mathcal{R}_s$ ,  $\mu$  doit donc avoir un pôle d'indice  $\frac{m}{6k}$  avec  $m \wedge 6 = 1$  et un pôle à monodromie locale parabolique. De plus, comme la monodromie de  $\mathcal{R}_s$  n'est pas abélienne (cf section 4.8.2), il doit en être de même pour  $\mu$ , ce qui implique que  $\mu$  a au moins trois pôles non apparents (i.e. à monodromies locales non triviales). En outre, le birapport des quatre pôles de  $\mathcal{R}_s$  varie avec  $s$ , ce qui signifie que le revêtement  $\phi_s$  se déforme et qu'il existe une valeur critique  $k(s)$  non-constante, distincte des pôles, pour  $\phi_s$ . Soient  $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}$  les exposants de  $\mu$  avec  $p_i \wedge q_i = 1$  et  $q_i > 0$ . Fixons  $\beta_i = 1/q_i$  si  $\alpha_i \notin \mathbb{Z}$  et  $\beta_i = 0$  sinon. On peut alors interpréter  $\phi_s : \mathbb{P}^1 = S \rightarrow \Sigma = \mathbb{P}^1$

comme revêtement ramifié entre surfaces de Riemann munies de métriques singulières de courbure  $-1$  telles que les pôles de nos équations de Riccati correspondent à des singularités des métriques dont les angles sont  $(2\pi\beta_i)$  et  $(\frac{2a\pi}{6}, 0, 0, \frac{2b\pi}{6})$  avec  $ab \neq 0$ . En effet, on peut appliquer le théorème suivant à  $\Sigma$  puis relever la métrique à  $S$  par  $\phi_s$ .

**Théorème 4.3.3 (Poincaré).** — Soient  $\Sigma$  une surface de Riemann,  $(a_i)_{i \in I}$  une famille finie de points de  $\Sigma$  distincts deux à deux et  $(q_i)_{i \in I}$  avec, pour tout  $i$ ,  $q_i \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ . Soit  $A = 2\pi \left( 2g(\Sigma) - 2 + \sum_{i \in I} \left( 1 - \frac{1}{q_i} \right) \right)$ . Si  $A > 0$  alors il existe un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  tel que  $\mathbb{H}/\Gamma \xrightarrow{\text{hol.}} \Sigma$  et tel que la métrique sur  $\mathbb{H}$  donne une métrique singulière exactement aux  $(a_i)$  avec les angles  $(\frac{2\pi}{q_i})$  et l'aire de  $\Sigma$  pour cette métrique soit donnée par  $A$ .

On peut ensuite comparer les aires de  $\Sigma$  et  $S$  pour cette métrique :

$$(1) \quad \text{Aire}(S) = d \cdot \text{Aire}(\Sigma)$$

où  $d$  est le degré de  $\phi_s$ . De plus, nous avons d'une part  $\text{Aire}(\Sigma) = 2\pi(-2 + \sum_i(1 - \beta_i))$ , ce qui donne

$$\text{Aire}(\Sigma) \geq 2\pi \left( -2 + (1 - 0) + \left( 1 - \frac{1}{6} \right) + \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \right) \geq \frac{2\pi}{3},$$

et d'autre part, de la même manière, comme on peut le voir à l'aide d'une triangulation géodésique de  $S$ ,

$\text{Aire}(S) = 2\pi(-2 + ((1 - 0) + (1 - 0) + (1 - \frac{a}{6}) + (1 - \frac{b}{6}) + \sum_i(1 - r_i)))$  où les  $r_i$  sont les indices de ramifications des points qui ne correspondent pas à des pôles sur  $S$ . On a ainsi  $\text{Aire}(S) \leq 2\pi(-2 + 2(1 - 0) + 2(1 - \frac{1}{6}) + (1 - 2)) = \frac{4\pi}{3}$ . L'équation (1) donne donc  $d \frac{2\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$  ou encore  $d \leq 2$ . La famille  $(\phi_s)$  est donc une famille de revêtements de degré deux de  $\mathbb{P}^1$  vers lui-même, c'est donc une déformation de  $x \mapsto x^2$ , consistant à faire bouger les points de ramification par rapport aux pôles de  $\mu$ . Or cette famille de revêtements correspond à la solution à paramètre  $\sqrt{t}$  de l'équation de Painlevé VI et ne peut donc correspondre à la nôtre (cf [LT08]), d'où une absurdité.

Notons que le raisonnement que nous venons de faire ne dépend que de la monodromie de  $\mathcal{R}_s$ , on en déduit ce qui suit.

**Lemme 4.3.4.** — Le feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  n'est pas birationnellement équivalent à un feuilletage de Riccati pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.

**Remarque 4.3.5.** — Évidemment ce type de méthode peut s'appliquer à d'autres déformations isomonodromiques, voir [Dia12].

#### 4.4. Construction de notre exemple

Notre exemple est donné par un feuilletage de Riccati  $\hat{\mathcal{R}}$  sur  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Ce feuilletage provient du feuilletage  $\mathcal{R}$  de la section 4.3 au sens suivant :  $\mathcal{R} = \pi^* \hat{\mathcal{R}}$ , où  $\pi : (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  est une application rationnelle dominante de fibre générique finie. On pense à  $\pi$  comme à un revêtement ramifié entre variétés vues modulo transformations birationnelles. L'application  $\pi$  est obtenue en quotientant  $\mathcal{R}$  par un groupe de symétries birationnelles.

Ces symétries sont recherchées comme préservant deux fibrations sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  : la fibration  $(s, x, z) \rightarrow s$  qui donne le paramètre de la déformation isomonodromique et la projection  $(s, x, z) \mapsto (s, x)$  du  $\mathbb{P}^1$ -fibré ; elles sont donc de la forme  $\phi : (s, x, z) \mapsto (A.s, B(s).x, C(s, x).z)$  avec  $A, B(s), C(s, x) \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  et  $s \mapsto B(s)$ ,  $(s, x) \mapsto C(s, x)$  rationnelles.

Le lieu polaire de  $\mathcal{R}$  contient quatre sections  $D_i = \{x = p_i(s)\}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  de  $(s, x) \rightarrow s$  qui doivent être préservées dans leur ensemble par  $(s, x) \mapsto (A.s, B(s).x)$ . Le birapport  $t(s) = [p_1, p_2, p_3, p_4]$  est une fonction rationnelle. Il est bien connu (cf [Art98, pp 38-39]) que  $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_i(s) | i = 1, \dots, 4\}$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_i(A.s) | i = 1, \dots, 4\}$  si et seulement si  $u(s) = u(A.s)$ , où  $u(s) = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2}$ . Un tel  $A$  correspond alors à  $B(s)$  qui induit une permutation  $\{D_i | i = 1, \dots, 4\} = \{D_{\sigma(i)} | i = 1, \dots, 4\}$ . Si  $A$  et  $B$  correspondent à une symétrie de  $\mathcal{R}$ , cette permutation doit préserver modulo  $\mathbb{Z}^4$  le quadruplet  $(\pm\theta_i)$  des exposants associés aux  $D_i$ . Si  $\mathcal{R}$  a des pôles non-apparents de la forme  $\{s = c_k\}$ , ils doivent aussi être préservés dans leur ensemble par  $A$  en respectant les exposants  $\pm\theta_{c_k}$  correspondants.

Toutes ces conditions étant réunies, on doit déterminer si il existe  $C$  tel que  $\phi : (s, x, z) \mapsto (A.s, B(s).x, C(s, x).z)$  soit effectivement une symétrie de  $\mathcal{R}$ . Pour ce faire, on calcule les singularités du feuilletage  $\mathcal{R}$ . On s'intéresse particulièrement aux singularités  $(z = f_{i,+}(s), z = f_{i,-}(s))$  au dessus de  $D_i$ , si il n'y a qu'une section de singularité  $f_i$  au dessus de  $D_i$  on note  $f_i = f_{i,+} = f_{i,-}$ . La transformation  $C$  doit être telle que

$$\{f_{\sigma(i),+}(A.s), f_{\sigma(i),-}(A.s)\} = \{C(s, x).f_{i,+}(s), C(s, x).f_{i,-}(s)\}.$$

En fait, on peut même déterminer qui de  $f_{i,+}$  et  $f_{i,-}$  correspond à  $f_{\sigma(i),+}$  : les singularités  $f_{i,\pm}$  correspondent aux directions propres des résidus de la

connexion de rang 2 dont provient  $\mathcal{R}$ , on peut donc y attacher les valeurs propres correspondantes et  $\phi$  devra les respecter.

Dans le cas où  $(\pm\theta_i)_{1 \leq i \leq 4} = (\pm\theta_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq 4}$  -modulo rien-  $C(s, x)$  varie holomorphiquement avec  $x \in \mathbb{P}^1$  pour  $s$  générique, donc  $C(s, x) = C(s)$ ; et si trois des  $s_{i,\pm}$  sont distincts, cela permet de décider l'existence de  $C$  et, le cas échéant, de le calculer.

Quand  $(\pm\theta_i)_{1 \leq i \leq 4} = (\pm\theta_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq 4}$  modulo  $\mathbb{Z}^4$  seulement, on peut essayer de se ramener à la situation précédente, en ajoutant un cinquième pôle apparent  $p_5(x)$  par transformation de jauge méromorphe, c'est ce qu'on a dû faire pour l'exemple que nous présentons ici.

Une fois trouvé un groupe fini de transformation  $(\phi_k)_{k \in K}$ , avec  $C_k(s, x) = C_k(s)$ , on veut quotienter  $\mathcal{R}$  par son action. Pour ce faire on se ramène à un problème de dimension 1 : on cherche des coordonnées  $\tilde{x} = U(s).x$  et  $\tilde{z} = V(s).z$  telles que les  $\phi_k$  se lisent  $(s, \tilde{x}, \tilde{z}) \mapsto (A_k.s, \tilde{x}, \tilde{z})$  à l'aide de ces coordonnées. On est ainsi amené à résoudre  $(U(s) = U(A_k.s)B_k(s))_k$  pour connaître  $\tilde{x}$ , ce qui nous semble assez délicat en général. Cela fait, on doit encore résoudre  $(V(s) = V(A_k.s)C_k(s))_k$  pour déterminer  $\tilde{z}$ .

Finalement, on obtient un feuilletage de Riccati  $\tilde{\mathcal{R}}$  dont un groupe de symétries  $G$  est donné par des transformations du type  $s \mapsto A_k.s$ . On trouve ensuite une fonction rationnelle  $y(s)$  qui est invariante sur les orbites de  $G$  et qui sépare les orbites. La projection sur le quotient de  $\mathbb{P}^1$  par  $G$  est alors donnée par  $y : \mathbb{P}_s^1 \rightarrow \mathbb{P}_y^1$ . Les formes différentielles  $\alpha, \beta, \gamma$  qui définissent  $\tilde{\mathcal{R}}$  sont invariantes par  $G$  et s'écrivent donc sous la forme  $a(y, \tilde{x})d\tilde{x} + b(y, \tilde{x})dy$ , avec  $a$  et  $b$  rationnelles. C'est ce qui donne  $\hat{\mathcal{R}}$ . La détermination de  $a$  ou de  $b$  se réduit au problème suivant : connaissant des fractions rationnelles  $y(s)$  et  $F(s)$  telles qu'il existe  $G(y)$  rationnelle satisfaisant  $G(y(s)) = F(s)$ , déterminer  $G$ . Ce problème se résout par des considérations de multiplicités ou l'emploi de bases de Gröbner.

Pour notre exemple on a  $y(s) = \frac{(469045s+1)^2(807139s+1)^2}{(4268135377s^2+599996s+1)^2}$ .

Pour obtenir une connexion sur  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ , on a utilisé l'application birationnelle standard  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  qui induit un biholomorphisme en restriction à la carte affine  $(\tilde{x}, y)$ . Le feuilletage  $\hat{\mathcal{R}}$  est défini par la forme  $-dz + \alpha + \beta z + \gamma z^2$  sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$  avec  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  donnés ci-dessous, où on a remplacé  $\tilde{x}$  par  $x$ .

$$\begin{aligned} \alpha &= -5 \frac{x(3y+1)(-y+3x)dx}{(-y+27x^2-6x)(-2y^2-9y+30yx+9x^2)} - \frac{5}{12} \frac{(18y^2x-10y^2+162yx^2-45yx+81x^3-18x^2)xdy}{(-y+27x^2-6x)y(-2y^2-9y+30yx+9x^2)}, \\ \beta &= \frac{(-75y^3x+12y^3-45y^2x^2+54y^2-40y^2x-1212yx^2+810yx^3+265yx+15x^2-216x^3)dx}{6(-y+27x^2-6x)x(-2y^2-9y+30yx+9x^2)} \\ &+ \frac{(1350y^4x-966y^4+17010y^3x^2-4707y^3x-256y^3-17064y^2x^2+2466y^2x)dy}{72(-y+27x^2-6x)y(-2y^2-9y+30yx+9x^2)(3y+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(49815 y^2 x^3 - 428 y^2 - 1845 y x - 30780 y x^3 + 14508 y x^2 + 21870 y x^4 - 5832 x^4 + 1701 x^3 - 90 x^2) dy}{72(-y+27 x^2-6 x)y(-2 y^2-9 y+30 y x+9 x^2)(3 y+1)} \text{ et} \\
\gamma = & \frac{(226800 y^2 x^2 - 8325 y^3 x - 67665 y^2 x + 33 y x + 2376 y x^2 - 1080 x^2 + 2593 y^2 + 565 y - 75 x + 1875 y^4 - 5033 y^3) dx}{720(-y+27 x^2-6 x)x(-2 y^2-9 y+30 y x+9 x^2)} \\
& - \frac{(-7950 y^5 + 33750 y^5 x + 104906 y^4 - 374769 y^4 x - 36450 y^4 x^2 - 6169500 y^3 x^2 + 776799 y^3 x + 1322 y^3) dy}{1864(-y+27 x^2-6 x)x(-2 y^2-9 y+30 y x+9 x^2)y(3 y+1)} \\
& - \frac{(11524275 y^3 x^3 - 2426517 y^2 x^3 + 7654500 y^2 x^4 + 72945 y^2 x - 71244 y^2 x^2 - 4030 y^2 - 951831 y x^3 + 224028 y x^2 - 17325 y x) dy}{1864(-y+27 x^2-6 x)x(-2 y^2-9 y+30 y x+9 x^2)y(3 y+1)} \\
& - \frac{(1968300 y x^5 + 801900 y x^4 - 145800 x^4 - 450 x^2 + 14985 x^3 + 393660 x^5) dy}{1864(-y+27 x^2-6 x)x(-2 y^2-9 y+30 y x+9 x^2)y(3 y+1)}.
\end{aligned}$$

#### 4.5. Dimensions de Kodaira

On choisit de s'intéresser au feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{P}^2$  dont la structure transverse est donnée par notre feuilletage de Riccati  $\hat{\mathcal{R}}$  et la section  $z = 0$ . Ce feuilletage est ainsi donné, dans la carte affine  $(x, y)$  par la forme

$$\omega = -12y(1+3y)(3x-y)dx + [(10-18x)y^2 - 9x(18x-5)y - 9x^2(9x-2)] dy$$

Nous souhaitons décider si ce feuilletage est un feuilletage modulaire au sens de la définition 4.2.2. Pour ce faire, on emploie le théorème de Mc Quillan et Brunella indiqué dans [Bru03a, p 71] : les feuilletages modulaires sont, à transformation birationnelle près, les seuls feuilletages sur des surfaces projectives qui aient dimension de Kodaira **kod** =  $-\infty$  et dimension de Kodaira numérique  $\nu = 1$ .

On commence par calculer la dimension de Kodaira numérique de  $\mathcal{F}$ . Par définition elle se calcule en désingularisant le feuilletage puis en calculant la décomposition de Zariski<sup>(1)</sup> du diviseur canonique  $K_{\tilde{\mathcal{F}}}$  du feuilletage désingularisé  $\tilde{\mathcal{F}} : K_{\tilde{\mathcal{F}}}$  se décompose numériquement en  $K_{\tilde{\mathcal{F}}} \stackrel{num}{=} P + N$  où  $P$  est un  $\mathbb{Q}$ -diviseur nef et  $N$  est un  $\mathbb{Q}^+$ -diviseur contractile dont les composantes irréductibles sont orthogonales à  $P$ , comme décrit dans [Bru00, pp 101-102]. La dimension de Kodaira numérique de  $\mathcal{F}$  est alors définie par :

$$\nu(\mathcal{F}) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \stackrel{num}{=} 0, \\ 1 & \text{si } P \stackrel{num}{\neq} 0 \text{ et } P.P = 0, \\ 2 & \text{si } P.P > 0. \end{cases}$$

1. Cette décomposition existe à condition que le feuilletage ne soit pas une fibration rationnelle, on verra plus loin que les courbes rationnelles invariantes sont suffisamment rares pour exclure cette situation.

D'après un théorème de Mc Quillan (voir [Bru00, Theorem 1 p 106]), pourvu que  $\tilde{\mathcal{F}}$  soit relativement minimal, le support de  $N$  est bien connu : c'est la réunion des supports des  $\tilde{\mathcal{F}}$ -chaînes maximales.

Les  $\tilde{\mathcal{F}}$ -chaînes sont les courbes  $C$  de composantes irréductibles  $(C_i)_{i=1\dots r}$  telles que, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ , on ait

- $C_i$  est une courbe rationnelle lisse invariante de  $\tilde{\mathcal{F}}$ ,
- $C_i.C_j = 1$  si  $|i - j| = 1$ ,
- $C_i.C_j = 0$  si  $|i - j| > 1$ ,
- $C_i.C_i < -1$ ,
- $C_1$  contient une seule singularité de  $\tilde{\mathcal{F}}$  et, pour  $i \in \{2, \dots, r\}$ ,  $C_i$  contient exactement deux singularités de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

La condition de relative minimalité est une condition qui porte sur les courbes rationnelles invariantes de  $\tilde{\mathcal{F}}$  (cf [Bru00, chapter 5] ).

On voit que la compréhension des courbes rationnelles invariantes de  $\mathcal{F}$  est un préliminaire à la bonne réalisation de notre objectif.

On sait que certaines composantes du lieu polaire de  $\hat{\mathcal{R}}$  peuvent donner des courbes invariantes pour le feuilletage, ce qui se vérifie pour les composantes suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \ell_1 : & y = 0; \\ \ell_2 : & y + \frac{1}{3} = 0; \\ \ell_\infty : & \text{la droite à l'infini}; \\ R : & -\frac{1}{27}y + x^2 - \frac{2}{9}x = 0 \text{ et} \\ V : & -\frac{2}{9}y^2 - y + \frac{10}{3}xy + x^2 = 0. \end{cases}$$

Chacune de ces composantes est une courbe rationnelle lisse.

On calcule à l'aide de Maple l'ensemble des points singuliers  $\Sigma = \text{Sing}(\mathcal{F})$  du feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{P}^2$  et, pour tout  $p \in \Sigma$ , on calcule la partie linéaire  $L(p)$  d'un champs de vecteurs à zéros isolés définissant  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $p$ . Les singularités non-réduites sont les éléments  $p$  de  $\Sigma$  tels que  $L(p) = 0$  ou bien tels que le rapport  $\lambda = \lambda(p)$  des valeurs propres de  $L(p)$  soit un rationnel strictement positif. Ce sont ces singularités qu'il faut éclater pour désingulariser le feuilletage  $\mathcal{F}$ , cf [Bru00] Chapitre 1.

On donne la liste des éléments  $p$  de  $\Sigma$  et leurs propriétés dans le tableau 1. On donne un dessin de la configuration de nos courbes dans la figure 1. On y place aussi les points singuliers qui, à l'exception du point  $T$ , correspondent à des intersections de nos composantes de pôle.

**4.5.1. Désingularisation.** — Par inspection de la figure 1, on voit que si  $p$  est élément de  $\{A, B, C, G, I\}$  alors le feuilletage  $\mathcal{F}$  a une singularité dicritique

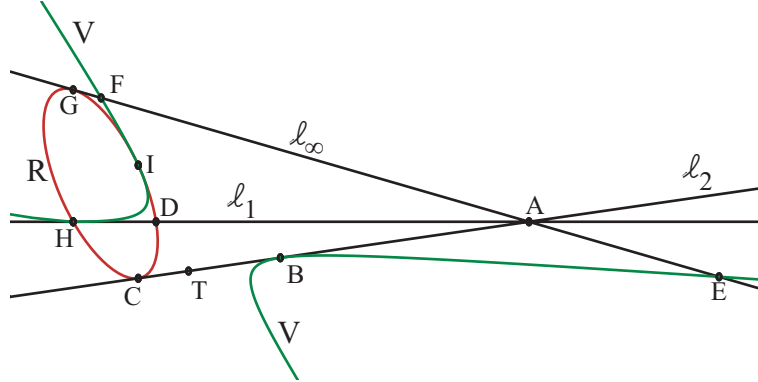


TABLE 1. Description des points singuliers

$p$	$\lambda$	élément de	coordonnées de $p$
$A$	1	$\ell_1, \ell_2$ et $\ell_\infty$	$(u, v) = (0, 0)$
$B$	2	$V$ et $\ell_2$	$(x, y) = (5/9, -1/3)$
$C$	2	$R$ et $\ell_2$	$(x, y) = (1/9, -1/3)$
$D$	-2	$R$ et $\ell_1$	$(x, y) = (2/9, 0)$
$E, F$	$\lambda < 0$	$V$ et $\ell_\infty$	$(u, v) = (15/2 \pm 9/2 \sqrt{3}, 0)$
$G$	2	$R$ et $\ell_\infty$	$(s, t) = (0, 0)$
$H$	partie linéaire nulle	$V, R$ et $\ell_1$	$(x, y) = (0, 0)$
$I$	3	$V$ et $R$	$(x, y) = (1/3, 1)$
$T$	-4	$\ell_2$	$(x, y) = (2/9, -1/3)$

On utilise sur  $\mathbb{P}^2$  les cartes  $[x : y : 1] \mapsto (x, y)$ ,  $[1 : u : v] \mapsto (u, v)$  et  $[s : 1 : t] \mapsto (s, t)$ .

FIGURE 1. configuration de courbes et positions des points



en  $p$ . Comme  $\lambda = \lambda(p) \in \mathbb{N}^*$ , en appliquant le théorème de forme normale de Poincaré-Dulac on obtient que, dans de bonnes coordonnées  $(z, w)$  au voisinage de  $p$ , le feuilletage est donné par le champ  $z\partial_z + (\lambda w + \varepsilon z^\lambda)\partial_w$ , avec  $\varepsilon = 0$  ou  $\varepsilon = 1$ .

De plus, le fait que la singularité soit dicritique impose  $\varepsilon = 0$ . À l'aide des formes normales, on peut alors voir que la singularité en  $p$  se résout par une suite de  $\lambda$  éclatements de diviseur exceptionnel une chaîne de courbes rationnelles  $Ch(p)$ , dont seulement la dernière est transverse au feuilletage et d'auto-intersection  $-1$ , tandis que les autres sont d'auto-intersection  $-2$  :

pour  $p = B, C, G$ ,  $\lambda = 2$  on appelle  $D_p$  la première composante de  $Ch(p)$  et  $E_p$  la seconde ; pour  $p = A$ , il n'y a qu'une composante à  $Ch(p)$ , qu'on nomme  $D_A$  et pour  $p = I$ , il y a trois composantes, la première est appelée  $F_I$ , la deuxième est appelée  $D_I$  et la troisième est appelée  $E_I$ .

Soit  $X \rightarrow \mathbb{P}^2$  la désingularisation de  $A, B, C, G, I$  décrite ci-dessus. La désingularisation de  $H$  n'est pas aussi prévisible. Toutefois, on voit, en calculant, que si on éclate  $X$  en  $H$ , le feuilletage induit sur l'éclaté a trois singularités sur le diviseur exceptionnel  $D_H$  : une réduite en  $H_1$  avec  $\lambda(H_1) = -7/2$ , une réduite en  $H_2$  avec  $\lambda(H_2) = -7/12$  et une dicritique en  $H_3$  avec  $\lambda(H_3) = 1$ . Il suffit ensuite d'éclater encore une fois en  $H_3$  pour désingulariser le feuilletage, le nouveau diviseur exceptionnel  $E_H$  est alors transverse au feuilletage, tandis que la transformée stricte de  $D_H$ , qu'on note encore  $D_H$ , est invariante par le feuilletage.

On note  $\tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  la désingularisation complète ainsi obtenue et  $\tilde{\mathcal{F}}$  le feuilletage désingularisé, on donne un dessin décrivant cette désingularisation dans la figure 3, les singularités y sont représentées par des points. Dans la figure 2, on donne un dessin plus épuré qui indique les intersections entre les courbes rationnelles invariantes par  $\tilde{\mathcal{F}}$  que nous connaissons. Le diviseur canonique du feuilletage  $\mathcal{F}$  est aisément calculé :  $\mathcal{F}$  est de degré 3, si  $\delta$  est une droite générique de  $\mathbb{P}^2$ , alors  $K_{\mathcal{F}} = (3-1)\delta = 2\delta$  d'après [Bru00, p 27]. Dans la suite d'éclatements on peut suivre ce que devient le diviseur canonique du nouveau feuilletage, c'est l'objet du résultat suivant.

**Proposition 4.5.1.** — *Soient  $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  l'éclatement d'une surface  $Y$  en un point  $p$  et  $E$  le diviseur exceptionnel. Soit  $\mathcal{H}$  un feuilletage sur  $Y$  et  $\tilde{\mathcal{H}}$  le feuilletage induit sur  $\tilde{Y}$ . Soit  $a(p)$  l'ordre d'annulation d'une forme  $\omega$ , à zéros isolés, donnant le feuilletage  $\mathcal{H}$  au voisinage de  $p$ .*

- *Si  $E$  est invariant par  $\mathcal{H}$  alors  $K_{\tilde{\mathcal{H}}} = \pi^*(K_{\mathcal{H}}) - (a(p) - 1)E$ .*
- *Si  $E$  n'est pas invariant par  $\mathcal{H}$  alors  $K_{\tilde{\mathcal{H}}} = \pi^*(K_{\mathcal{H}}) - a(p)E$ .*

*Démonstration.* — Voir [Bru00, Chapter 2]. □

Signalons que si  $\mathcal{C}$  est une courbe,  $\pi^*(\mathcal{C})$  est la **transformée totale** de  $\mathcal{C}$  par l'éclatement  $\pi$ . On utilisera le nom des diviseurs de  $\mathbb{P}^2$  pour désigner leurs **transformées strictes** par  $\tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Par utilisations successives de cette proposition, on obtient  $K_{\tilde{\mathcal{F}}} = 2\delta - D_A - E_B - E_C - D_H - 2E_H - E_G - E_I$ .

FIGURE 2. Chaînes et cycles

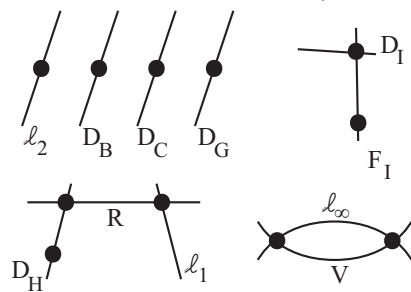
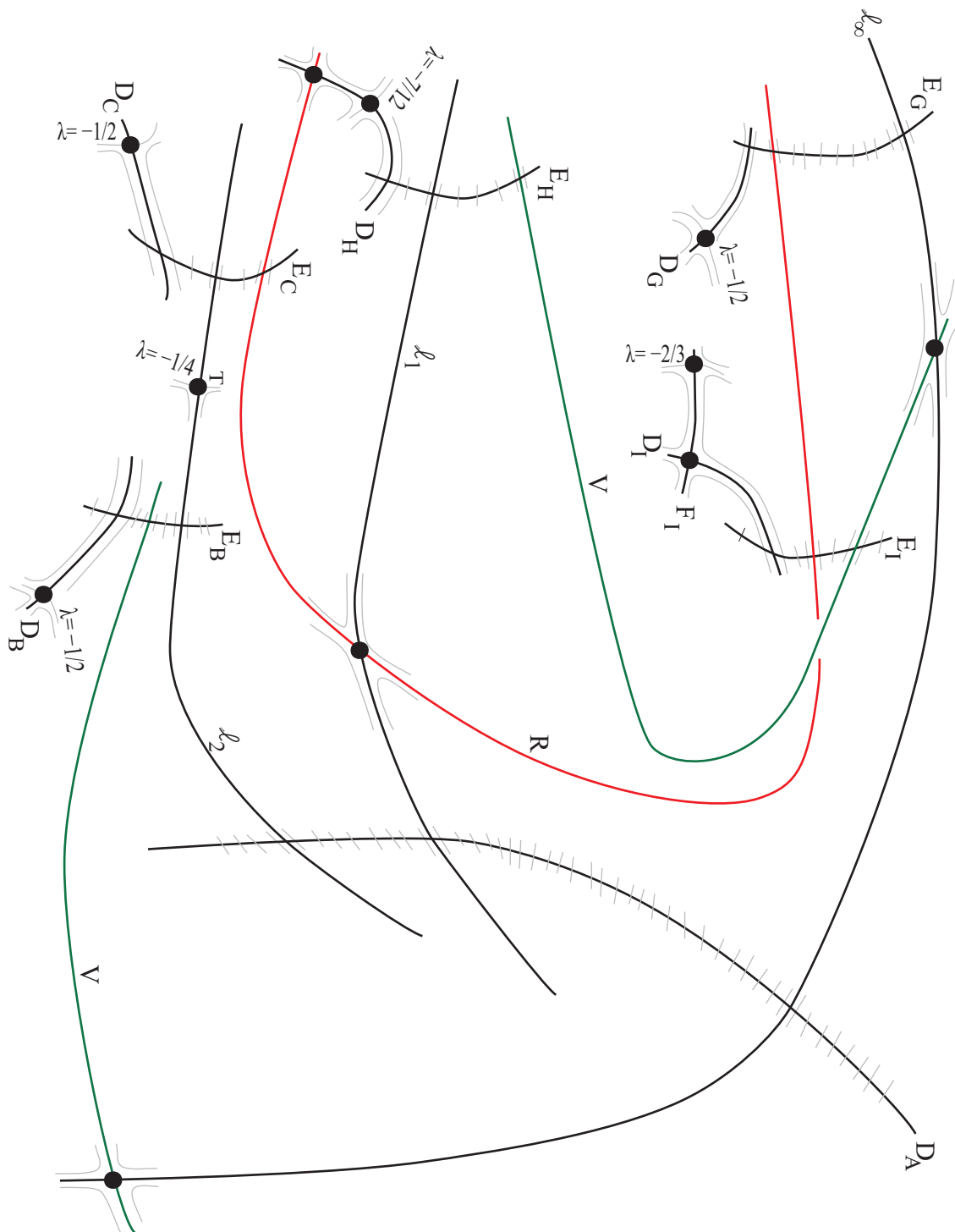


FIGURE 3. Désingularisation du feuilletage.



**4.5.2. Étude des courbes rationnelles invariantes.** — Nous entrons dans un passage technique, qui permet d'exclure la présence de courbes rationnelles lisses invariantes inconnues pour le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  qui feraient obstruction au bon calcul de sa dimension de Kodaira numérique. Soit  $\mathcal{C}_0$  une telle courbe. On définit des inconnues pour le nombre d'intersections entre  $\mathcal{C}_0$  et les diviseurs qui nous intéressent dans le tableau 2.

TABLE 2. Intersections de  $\mathcal{C}_0$  avec nos diviseurs.

$D$	$R$	$V$	$\ell_1$	$\ell_2$	$\ell_\infty$	$D_A$	$D_B$	$D_C$	$D_H$	$D_G$	$D_I$	$F_I$	$E_H$	$E_B$	$E_C$	$E_I$	$E_G$	$\delta$
$D\mathcal{C}_0$	0	0	0	$\varepsilon_T$	0	$n_A$	$\varepsilon_B$	$\varepsilon_C$	$\varepsilon_H$	$\varepsilon_G$	0	$\varepsilon_I$	$n_H$	$n_B$	$n_C$	$n_I$	$n_G$	$d$

Le degré de l'image de  $\mathcal{C}_0$  dans  $\mathbb{P}^2$  est  $d$ . En appliquant le théorème de Bézout et en utilisant notre connaissance de la désingularisation du feuilletage, on obtient les équations suivantes qui lient les intersections lues dans  $\mathbb{P}^2$  et celles lues dans  $\tilde{\mathbb{P}}^2$ .

$$(3) \quad \begin{cases} E_{\ell_1} : & d = n_A + 2n_H + \varepsilon_H \\ E_{\ell_2} : & d = 2n_B + \varepsilon_B + 2n_C + \varepsilon_C + n_A + \varepsilon_T \\ E_{\ell_\infty} : & d = n_A + 2n_G + \varepsilon_G \\ E_R : & 2d = n_H + \varepsilon_H + 3n_I + \varepsilon_I + 2n_G + \varepsilon_G + 2n_C + \varepsilon_C \\ E_V : & 2d = 2n_H + \varepsilon_H + 3n_I + \varepsilon_I + 2n_B + \varepsilon_B \end{cases}$$

D'autre part (cf [Bru00, Chapter 3]), l'auto-intersection de  $\mathcal{C}_0$  peut être calculée en fonction des  $\varepsilon_p$  à l'aide des indices de Camacho-Sad (qui correspondent aux  $\lambda(p)$ ) : par la formule de Camacho-Sad, on a  $\mathcal{C}_0^2 = -\frac{1}{2}(\varepsilon_B + \varepsilon_C + \varepsilon_G) - \frac{7}{12}\varepsilon_H - \frac{2}{3}\varepsilon_I - \frac{1}{4}\varepsilon_T$ . Comme les singularités sont réduites, on doit avoir, pour tout  $p$ ,  $\varepsilon_p \in \{0, 1\}$ . De plus, comme l'auto-intersection de  $\mathcal{C}_0$  est entière, les configurations envisageables pour les  $\varepsilon_p$  se restreignent à celles données dans le tableau 3 où l'on mentionne les valeurs de  $\mathcal{C}_0^2$  qui y correspondraient.

Pour chacun de ces choix de  $(\varepsilon_p)$ , on peut résoudre le système linéaire (3). Seuls les choix n°1, 4, 5 et 8 correspondent à des solutions entières pour ce système. L'ensemble des solutions  $\sigma$  est alors un  $\mathbb{Z}$ -module de rang deux. Toutefois on peut donner encore deux contraintes sur les inconnues du système (3). Premièrement, on peut calculer  $\mathcal{C}_0^2$  en fonction de l'auto-intersection  $d^2$  de sa projetée dans  $\mathbb{P}^2$  et de la désingularisation  $\tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ , en utilisant la proposition suivante.

**Proposition 4.5.2** (voir [GH78], p 187 et p 476). — Soient  $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  l'éclatement d'une surface  $Y$  en un point  $p$  et  $E$  le diviseur exceptionnel.

TABLE 3. Auto-intersections envisageables pour  $\mathcal{C}_0$ .

n°	$\varepsilon_H$	$\varepsilon_I$	$\varepsilon_B$	$\varepsilon_C$	$\varepsilon_G$	$\varepsilon_T$	$\mathcal{C}_0^2$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	-1
3	0	0	1	0	1	0	-1
4	0	0	1	1	0	0	-1
5	1	1	0	0	1	1	-2
6	1	1	0	1	0	1	-2
7	1	1	1	0	0	1	-2
8	1	1	1	1	1	1	-3

1. Si  $\mathcal{C} \subset Y$  est une courbe qui passe par  $p$  avec multiplicité  $m$  et si  $\tilde{\mathcal{C}} \subset \tilde{Y}$  est sa transformée stricte alors  $\tilde{\mathcal{C}}^2 = \mathcal{C}^2 - m^2$ .
2. De plus le diviseur canonique  $K_{\tilde{Y}}$  de  $\tilde{Y}$  est donné par  $K_{\tilde{Y}} = \pi^*(K_Y) + E$ .

En appliquant successivement la première propriété, on obtient

$$(4) \quad \mathcal{C}_0^2 = d^2 - n_A^2 - 3n_I^2 - 2\varepsilon_I n_I - \varepsilon_I - \sum_{p=B,C,G,H} ((n_p + \varepsilon_p)^2 + n_p^2).$$

En appliquant la seconde propriété et en sachant  $K_{\mathbb{P}^2} = -3\delta$ , on obtient :  $K_{\tilde{\mathbb{P}}^2} = -3\delta + F_I + 2D_I + D_C + D_H + D_G + D_A + D_B + 2E_B + 2E_C + 2E_G + 2E_H + 3E_I$ . Deuxièmement, on utilise la formule du genre :  $0 = \frac{1}{2}\mathcal{C}_0 \cdot (\mathcal{C}_0 + K_{\tilde{\mathbb{P}}^2}) + 1$ , pour obtenir

$$(5) \quad 0 = 1 + \frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{2}d + \frac{1}{2}n_A + \frac{3}{2}n_I - \varepsilon_I n_I - \frac{1}{2}n_A^2 - \frac{3}{2}n_I^2 + \sum_{p=B,C,G,H} n_p(1 - n_p - \varepsilon_p).$$

Pour chacun des choix n°1, 4, 5 et 8 en injectant les valeurs des  $\varepsilon_p$ , la valeur de  $\mathcal{C}_0^2$  correspondante, ainsi qu'une paramétrisation de  $\sigma$  par  $(\lambda, \beta) \in \mathbb{Z}^2$  dans (4), on arrive à paramétrer  $\lambda$  en fonction de  $\beta$  puis à conclure en utilisant (5). Les seules possibilités cohérentes sont alors celles données dans le tableau 4. Dans

TABLE 4.

$n_H$	$\varepsilon_H$	$n_I$	$\varepsilon_I$	$n_B$	$\varepsilon_B$	$n_C$	$\varepsilon_C$	$n_G$	$\varepsilon_G$	$n_A$	$\varepsilon_T$	$d$
1	1	2	1	1	0	0	0	1	1	3	1	6
3	1	5	1	2	1	0	1	3	1	7	1	14

les deux cas, l'éventuelle courbe invariante  $\mathcal{C}_0$  traverse plus de trois singularités,

— La description de la désingularisation que nous avons faite permet de donner, dans le tableau 5, la matrice de la forme d’intersection sur  $\tilde{\mathbb{P}}^2$  restreinte au sous-espace dont une famille génératrice est

On montre dans 4.5.2 que les seules courbes rationnelles invariantes lisses de  $\tilde{\mathcal{F}}$  sont des éléments de  $S$  ou bien sont d'auto-intersection inférieure à  $-2$  et contiennent plus de trois singularités. Ce qui fait que notre feuilletage est relativement minimal et que seuls des éléments de  $S$  entrent dans le support de la partie négative  $N$  de la décomposition de Zariski de  $K_{\tilde{\mathcal{F}}}$ . Les  $\tilde{\mathcal{F}}$ -chaînes maximales sont les suivantes :  $D_H - R - \ell_1$  ;  $D_I - F_I$  ;  $\ell_2$  ;  $D_B$  ;  $D_C$  et  $D_G$ .

Le support de  $N$  est donc  $D_G \cup D_C \cup D_B \cup \ell_2 \cup D_I \cup F_I \cup D_H \cup R \cup \ell_1$ . Ainsi  $N = aD_G + bD_C + cD_B + d\ell_2 + eD_I + fF_I + gD_H + hR + i\ell_1$ . Chacune des composantes de ce support est orthogonale à  $P \stackrel{num}{=} K_{\tilde{F}} - N$ , ce qui donne un

[illegible]

système d'équations linéaires simple qu'on résout :

$$N = \frac{1}{12} D_H + \frac{1}{6} R + \frac{7}{12} \ell_1 + \frac{1}{2} D_G + \frac{1}{2} D_B + \frac{1}{2} D_C + \frac{1}{3} F_I + \frac{2}{3} D_I + \frac{1}{4} \ell_2.$$

On voit alors que  $P \stackrel{num}{=} K_{\tilde{\mathcal{F}}} - N$  n'est pas numériquement trivial puisque  $(K_{\tilde{\mathcal{F}}} - N) \cdot \delta = \frac{5}{6}$ , puis on constate que  $P^2 = 0$ . Nous venons donc d'obtenir :

$$\nu(\mathcal{F}) = 1.$$

**4.5.4. Dimension de Kodaira.** — Dans cette section on commence par répéter les résultats généraux donnés dans [Bru00] qui circonscrivent  $\mathbf{kod}(\tilde{\mathcal{F}})$  en fonction de  $\nu(\mathcal{F})$ , ce qui nous permet ensuite d'obtenir  $\mathbf{kod}(\tilde{\mathcal{F}}) = -\infty$ . Premièrement, on a l'inégalité suivante pour tout fibré en droites  $L$  :

$$(6) \quad \nu(L) \geq \mathbf{kod}(L).$$

Ensuite, deux théorèmes.

**Théorème 4.5.3 (McQuillan-Mendes).** — *Si  $\mathcal{H}$  est un feuilletage réduit sur une surface algébrique et  $\mathbf{kod}(\mathcal{H}) = 1$  alors  $\mathcal{H}$  est*

1. *un feuilletage turbulent,*
2. *une fibration elliptique non-isotriviale,*
3. *une fibration isotriviale de genre  $g \geq 2$  ou*
4. *un feuilletage de Riccati.*

**Théorème 4.5.4 (McQuillan).** — *Si  $\mathcal{H}$  un feuilletage réduit sur une surface algébrique tel que  $\mathbf{kod}(\mathcal{H}) = 0$  alors  $\nu(\mathcal{H}) = 0$ .*

On déduit de cela l'énoncé suivant.

**Proposition 4.5.5.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage réduit transversalement projectif sur une surface projective  $X$ , tel que  $\nu(\mathcal{F}) = 1$ , dont une structure transverse  $(\pi : E \times X \rightarrow X, \mathcal{R}, \sigma)$  a une monodromie non métabélienne. On suppose aussi que  $\mathcal{R}$  n'est pas birationnellement équivalent au pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe. Alors  $\mathcal{F}$  est un feuilletage modulaire.*

*Démonstration.* — Par le théorème 4.5.4, on ne peut avoir  $\mathbf{kod}(\mathcal{F}) = 0$ . Il nous reste à exclure les éventualités 1 – 4 données dans le théorème 4.5.3 et à utiliser (6) et  $\mathbf{kod} \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$  pour conclure. Pour ce faire, on utilise le lemme suivant.



**Lemme 4.5.6 (Loray-Pereira).** — *Soit  $X$  une variété complexe projective lisse. Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de codimension 1 sur  $X$  qui possède deux structures transversalement projectives  $\mathcal{T} = (\mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X, \mathcal{R}, \sigma)$  et  $\mathcal{U}$  non-équivalentes au sens de [LP07], alors le groupe de monodromie de  $\mathcal{T}$  contient un groupe abélien d'indice  $\leq 2$  ou  $\mathcal{R}$  est birationnellement équivalent à un feuilletage de Riccati pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.*

*Démonstration.* — La preuve utilise [Scá97, Proposition 2.1], voir [LP07, Lemma 5.4.].  $\square$

Ainsi  $\mathcal{F}$  a une unique structure transversalement projective au sens de [LP07].

1. Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage turbulent, alors il admet une structure transversalement projective à monodromie virtuellement abélienne (donnée par des automorphismes de la courbe elliptique sous-jacente), ce qui est exclu.
2. Il n'est pas donné par une fibration, sans quoi il aurait une intégrale première méromorphe  $f$  qui lui fournirait une structure de feuilletage transversalement euclidien :  $dz = df$ , de monodromie triviale ; ce qui n'est pas conforme à nos hypothèses.
3. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  ne peut être un feuilletage de Riccati, puisque les feuilletages de Riccati sur  $X$  ont une structure transverse donnée par un feuilletage de Riccati birationnellement équivalent à un pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe, cf [LP07, section 3.1.].

$\square$

On en déduit le cœur de nos résultats.

**Théorème 4.5.7.** — *Le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  décrit à la partie 4.5.1 est un feuilletage modulaire.*

*Démonstration.* — Les hypothèses de la proposition 4.5.5 sont satisfaites par  $\tilde{\mathcal{F}}$  puisque :

- sa dimension de Kodaira numérique est  $\nu = 1$  ;
- le groupe de monodromie de sa structure transverse est gros, comme on le verra dans le lemme 4.8.3 ;
- Le feuilletage de Riccati de sa structure transverse n'est pas birationnellement équivalent au pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe, d'après le lemme 4.3.4.

$\square$

#### 4.6. Feuilletage dual

Par le théorème 4.2.4, ce qu'on vient d'obtenir est  $(\tilde{\mathbb{P}}^2, \tilde{\mathcal{F}}) = (\tilde{Y}_\Gamma, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma)$ , pour un certain  $\Gamma$ . On se propose de déterminer le feuilletage  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{P}^2$  qui correspond au feuilletage  $\tilde{\mathcal{G}}_\Gamma$  sur  $\tilde{\mathbb{P}}^2$ . Toujours par le théorème 4.2.4, les feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  ont un diviseur de tangence réduit  $Tang$ , donné par le lieu polaire de la structure transverse de  $\mathcal{F}$ , c'est à dire de degré 7. De plus, le diviseur de tangence de deux feuilletages sur  $\mathbb{P}^2$  de degrés  $d$  et  $d'$  est de degré  $d + d' + 1$ . Comme  $\mathcal{F}$  est de degré 3 on obtient que  $\mathcal{G}$  l'est aussi. Par un calcul affine, on voit que l'ensemble des feuilletages de degré 3 ayant  $Tang - \ell_\infty$  parmi leurs courbes invariantes est un pinceau  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$  dont seul un élément ne laisse pas invariant  $\ell_\infty$ . Ce pinceau est donné par  $\omega_t = P_t dx + Q_t dy$  où  $P_t = -12(1+3y)y(-2ty-y-10t+36tx+3x)$  et  $Q_t = (-81-162t)x^3 + (-162y+756ty+18+306t)x^2 + (-36y^2t-18y^2+45y-270ty-60t)x + 10y(y+t)$ . On remarque que

$$\begin{cases} s_1 = \left\{ (x, y) = \left( \frac{10t}{9(1+2t)}, \frac{20t(3t-1)}{3(1+2t)^2} \right) \right\} \subset R \text{ et} \\ s_2 = \left\{ (x, y) = \left( \frac{10t(-9+2t)}{3(44t^2-96t-9)}, \frac{-100t^2}{44t^2-96t-9} \right) \right\} \subset V \end{cases}$$

sont deux singularités de  $\mathcal{F}_t$ , cela va nous permettre de déterminer le  $t$  tel que  $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}$ . En effet, comme  $\tilde{\mathcal{G}}_\Gamma$  n'a pas de singularité sur  $R$  et  $V$  en dehors des intersections avec les autres courbes rationnelles invariantes, le  $t$  recherché doit être tel que  $s_1(t) \in \{C, D, G, H, I\}$  et  $s_2(t) \in \{B, E, F, H, I\}$ . La seule valeur de  $t$  qui satisfasse ces deux conditions est  $t = 3/4$ , on a donc finalement  $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{3/4}$ . On a trouvé une involution holomorphe de  $\tilde{\mathbb{P}}^2$  (voir section 4.7) qui échange  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , ainsi la structure transverse de  $\mathcal{G}$ , unique d'après le lemme 4.5.6, peut être obtenue en tirant en arrière celle de  $\mathcal{F}$  par  $\sigma$ .

#### 4.7. L'involution

Cette involution est donnée dans la carte affine  $(x, y)$  de  $\mathbb{P}^2$  par :

$$\sigma : (x, y) \mapsto \left( \frac{3y(3y+13)x - y(7y+9)}{(135y+9)x - 3y(3y+13)}, y \right).$$

On voit que c'est une transformation de de Joncquères.

On l'a découverte en étudiant les tangences entre le pinceau des droites issues de  $A$  et les feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . C'est une transformation de jauge méromorphe du  $\mathbb{P}^1$ -fibré  $(x, y) \mapsto y$  d'espace total l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en  $A$ , qui est holomorphe en dehors de  $\{(y-1)y=0\}$ . Quand on la conjugue par la désingularisation de  $\mathcal{F}$ , on obtient une transformation holomorphe de  $\tilde{\mathbb{P}}^2 = \tilde{Y}_\Gamma$

qui échange  $D_I$  et  $F_I$  ainsi que  $E_I$  et  $\{y = 1\}$ . De même, elle échange  $\ell_1$  et  $D_H$  en fixant globalement  $E_H$  et en réalisant un automorphisme non-trivial de  $R$ . Comme indiqué précédemment, cette involution échange  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ .

#### 4.8. Calcul de la monodromie des structures transverses

On souhaite comprendre ici les représentations de monodromie de  $\hat{\mathcal{R}}$  et  $\sigma^*\hat{\mathcal{R}}$ .

**Remarque 4.8.1.** — Soit  $\mathcal{R}_0$  un feuilletage de Riccati au dessus de  $X$  et  $D$  son lieu polaire. Soit  $D_1$  une composante de  $D$ . Si, localement, par transformation de jauge méromorphe, on peut faire disparaître le pôle  $D_1$ , alors  $\mathcal{R}_0$  n'a pas de monodromie locale près du point générique de  $D_1$ . L'hypersurface  $D_1$  est appelé **pôle apparent** de  $\mathcal{R}_0$ . Si  $D'$  est l'hypersurface formée des composantes de  $D$  non apparentes, alors  $D'$  est appelé **lieu polaire non apparent** de  $\mathcal{R}_0$  et la monodromie de  $\mathcal{R}_0$  se réduit à  $\rho : \pi_1(X \setminus D') \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ .

**4.8.1. Groupe fondamental.** — Un préalable au calcul de la représentation de monodromie de  $\hat{\mathcal{R}}$  est la compréhension du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe dans une surface. L'outil principal utilisé pour cela est le théorème topologique suivant, dû à Zariski et Van-Kampen :

**Théorème 4.8.2.** — Soit  $p : E \rightarrow B$  un fibré localement trivial qui possède une section  $s$ , avec  $E$  connexe par arcs. Soit  $b \in B$  et  $F_b$  sa fibre.

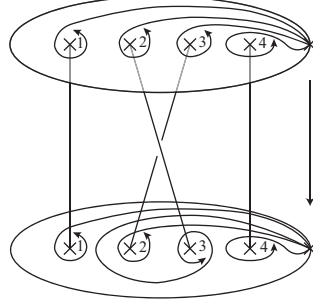
Le groupe fondamental de  $E$  est donné par la suite exacte scindée suivante  $0 \rightarrow \pi_1(F_b, b) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, b) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B, b) \rightarrow 0$ . La section est donnée par  $s_*$ .

*Démonstration.* — Voir [Shi] □

Précisons l'action du facteur  $\pi_1(B, b)$  sur  $\pi_1(F_b, b)$  pour le produit semi-direct  $\pi_1(B, b) \ltimes \pi_1(F_b, b)$  induit par cette suite exacte. Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  un lacet partant de  $b$ ,  $\gamma^*E$  est un fibré localement trivial de base simplement connexe, il est donc trivialisable :  $\gamma^*E \cong [0, 1] \times F_b$  et tout lacet  $\tau_0$  de  $F_b$  de point de base  $b$  se déforme continument en  $\tau_t$ , un lacet de point de base  $\gamma(t)$  dans la fibre  $F_{\gamma(t)}$ . On définit ainsi une action de  $\gamma \in \pi_1(B, b)$  sur  $\pi_1(F_b, b)$  en posant  $\tau_0 \cdot \gamma = \tau_1$  ; c'est l'action qui intervient dans la structure de produit semi-direct mentionnée ci-haut.

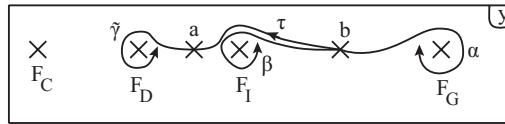
Dans le cas où  $F_b$  est un disque épointé, l'action correspond à l'action d'une tresse, comme indiqué dans la figure 4.

Soit  $X \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^2$  l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en  $A$  et  $E$  le diviseur exceptionnel. On va travailler avec  $\hat{\mathcal{R}}' = \psi^*\hat{\mathcal{R}}$ . Remarquons que  $X$  est muni d'une structure de fibré

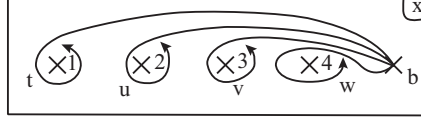
FIGURE 4. Action de la tresse  $\sigma_2$ 

en  $\mathbb{P}^1 : X \xrightarrow{\pi} E$ . Soit  $P$  le lieu polaire non-apparent de  $\hat{\mathcal{R}}'$ , on voit que  $E$  n'est pas une composante de  $P$ . Les composantes de  $P$  sont les transformées strictes des composantes du lieu polaire de  $\hat{\mathcal{R}}$  : trois fibres de  $\pi$ , à savoir  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $\ell_\infty$ , et les deux coniques. Soit  $\ell_I$  la fibre de  $I$  pour  $\pi$ . Soit  $Q = P \cup \ell_I$ ,  $X^0 = X \setminus Q$  et  $E^0 = E \setminus Q$ , on voit que  $\pi|_{X^0} : X^0 \rightarrow E^0$  est un fibré topologiquement localement trivial de fibre  $\mathbb{S}_4^2$ , la sphère privée de quatre points. De plus, ce fibré admet une section, donnée par  $E^0$ ; on a ainsi, par le théorème ci-dessus, une description du groupe fondamental de  $X^0$  comme produit semi-direct :  $\pi_1(X^0, b) = \pi_1(F_b, b) \rtimes \pi_1(E^0, b)$ .

Reste à identifier de façon effective les deux facteurs et l'action. Pour la base on choisit les générateurs  $\alpha, \beta, \gamma$  comme sur la figure 5, où l'on rapporte les fibres à l'ordonnée  $y$  de leur point d'intersection avec  $\{x = 0\}$ . On choisit pour  $F_b$  la transformée stricte de  $\{y = 4\}$  par l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en  $A$ . On choisit alors comme générateurs pour  $\pi_1(F_b, b)$  les lacets  $t, u, v, w$  comme sur la figure 6, où l'on utilise l'abscisse  $x$  des points comme coordonnée; la seule relation entre ces lacets est  $tuvw = 1$ .

FIGURE 5. Chemins de la base  $E^0$ 

On identifie les points 1, 2, 3 et 4 de  $F_b$  avec les points 1, 2, 3 et 4 du disque épointé quatre fois, ce qui permet d'interpréter l'action de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  à l'aide de l'action du groupe de tresses  $\mathcal{B}_4$ . Comme on le voit sur la figure 4,  $\mathcal{B}_4$  agit

FIGURE 6. Lacets de la fibre  $F_b$ 

-à droite par morphisme de groupe- sur  $(t, u, v, w)$  de la manière suivante :

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma_1 : (t, u, v, w) \mapsto (tut^{-1}, t, v, w) \\ \sigma_2 : (t, u, v, w) \mapsto (t, uvu^{-1}, u, w) \\ \sigma_3 : (t, u, v, w) \mapsto (t, u, vvw^{-1}, v) \end{cases}$$

Par inspection de notre figure réelle 1 et la connaissance des ordres de contacts entre les composantes de  $P$ , on voit que  $\alpha$  agit comme la tresse  $\sigma_2$ , que  $\beta$  correspond à la tresse  $\sigma_3^6$  et que l'action de  $\gamma = \tau\tilde{\gamma}\tau^{-1}$  est celle de  $\sigma_3^3$  suivie de celle de  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$  sur la fibre  $F_a$  de  $a$ , puis enfin suivie de l'action de  $\sigma_3^{-3}$ . Puisque des générateurs pour les facteurs sont donnés par les familles  $f = (\alpha, \beta, \gamma)$  et  $g = (t, u, v, w)$ , notre structure de produit semi-direct pour  $\pi_1(X^0, b)$  nous fournit la description par générateurs et relations suivante :

$$\pi_1(X^0, b) = \langle f \cup g | f_i^{-1} g_j f_i = g_j \cdot f_i, tuv = 1 \rangle .$$

De manière explicite, l'ensemble des relations est le suivant.

$$(8) \quad tuv = 1$$

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha^{-1}t\alpha = t \\ \alpha^{-1}u\alpha = uvu^{-1} \\ \alpha^{-1}v\alpha = u \\ \alpha^{-1}w\alpha = w \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \beta^{-1}t\beta = t \\ \beta^{-1}u\beta = u \\ \beta^{-1}v\beta = (vw)^3 v (vw)^{-3} \\ \beta^{-1}w\beta = ((vw)^2 v) w ((vw)^2 v)^{-1} \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \gamma^{-1}t\gamma = (tu(vw)^{-1}) w (tu(vw)^{-1})^{-1} \\ \gamma^{-1}u\gamma = tut^{-1} \\ \gamma^{-1}w\gamma = (t(wvw)^{-1}(vw)^2) t (t(wvw)^{-1}(vw)^2)^{-1} \\ \gamma^{-1}v\gamma = (t(wvw)^{-1}(vw)^2 t (wvw)^{-1}) v (t(wvw)^{-1}(vw)^2 t (wvw)^{-1})^{-1} \end{cases}$$

Par la relation (8) et le fait que  $\pi_1(E^0, b)$  agit par morphismes de groupe, on peut déduire une des quatre équations de (9), (10) ou (11) des trois autres. On peut donc simplifier la présentation en enlevant une équation de son choix dans chacune des familles de relations (9), (10) et (11), par exemple la plus longue, ce qui donne l'ensemble de relations suivant, où l'on a aussi appliqué  $tu = (vw)^{-1}$  dans la relation  $\gamma^{-1}t\gamma = (tu(vw)^{-1}) w (tu(vw)^{-1})^{-1}$ .

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} tuv w = 1 \\ \alpha^{-1}t\alpha = t \\ \alpha^{-1}v\alpha = u \\ \alpha^{-1}w\alpha = w \\ \beta^{-1}t\beta = t \\ \beta^{-1}u\beta = u \\ \beta^{-1}v\beta = (vw)^3 v (vw)^{-3} \\ \gamma^{-1}t\gamma = (vw)^{-2} w (vw)^2 \\ \gamma^{-1}u\gamma = tut^{-1} \\ \gamma^{-1}w\gamma = (t(wvw)^{-1}(vw)^2) t (t(wvw)^{-1}(vw)^2)^{-1} \end{array} \right.$$

D'après le théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental de l'union de sous espaces topologiques, pour avoir une présentation du groupe fondamental de  $X^1 = X \setminus P$ , il suffit d'ajouter à cette présentation la relation  $\beta = 1$ . Ce groupe est donc donné par les générateurs  $\{\alpha, \gamma, t, u, v, w\}$  et les relations :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} tuv w = 1 \\ \alpha^{-1}t\alpha = t \\ \alpha^{-1}v\alpha = u \\ \alpha^{-1}w\alpha = w \\ v = (vw)^3 v (vw)^{-3} \\ \gamma^{-1}t\gamma = (vw)^{-2} w (vw)^2 \\ \gamma^{-1}u\gamma = tut^{-1} \\ \gamma^{-1}w\gamma = (t(wvw)^{-1}(vw)^2) t (t(wvw)^{-1}(vw)^2)^{-1} \end{array} \right.$$

**4.8.2. Monodromie.** — Il nous suffira de comprendre la représentation de monodromie  $\rho : \pi_1(X^1, b) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  de  $\hat{\mathcal{R}}'$  en restriction à  $\pi_1(F_b)$  et à  $\pi_1(E \setminus P)$  pour la comprendre globalement. Remarquons que toute représentation de l'un de ces groupes vers  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  se relève à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  puisque ce sont des groupes libres. On pourra ainsi avoir recours à des raisonnements matriciels. Le pinceau des droites passant par  $A$  est le projeté du pinceau de  $\mathbb{P}^1$  de la déformation isomonodromique initiale  $\mathcal{R}_s$ , en particulier la monodromie de  $\hat{\mathcal{R}}'_{|F_b}$  est la même que celle d'un  $\mathcal{R}_s$ . Dans [Boa07], Boalch donne des traces

de matrices qui permettent de déterminer les images de  $t, u, v$  et  $w$  par la représentation de monodromie de  $\mathcal{R}_s$  modulo conjugaison globale et modulo l'action de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$  le mapping class group de la sphère épointée  $\mathbb{S}_4^2$ . L'action de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$  correspond à l'ambiguïté sur le choix des lacets simples  $t, u, v, w$  tels que  $\pi_1(F_b) = \langle u, v, w \rangle$  et  $tuvw = 1$ , voir [Bir75, Theorem 1.9 p 30]. Le théorème [IIS04, Theorem 2.3 p 6] (voir une autre preuve dans [Boa05, p 202]) permet de déduire des traces correspondant à un relèvement  $\tilde{\rho}$  de  $\pi_1(F_b, b) \xrightarrow{i^*} \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  à  $SL_2(\mathbb{C})$ , où  $i : F_b \rightarrow X^1$  désigne l'injection naturelle. Elles sont données dans le tableau 6, où  $T = \tilde{\rho}(t)$ ,  $U = \tilde{\rho}(u)$ ,  $V = \tilde{\rho}(v)$  et  $W = \tilde{\rho}(w)$ .

TABLE 6. Traces modulo l'action de  $\mathcal{B}_3$ 

$M$	$V$	$W$	$T$	$U$	$VW$	$WT$	$VT$
$trace(M)$	$\sqrt{3}$	2	2	$-\sqrt{3}$	1	0	1

Un quadruplet qui donne ces traces est donné ci-dessous.

$$V_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 + \sqrt{3} \\ -1 & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}, W_0 = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} + 5 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, T_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{3} - 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} -2 & 2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 4 & 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Ainsi,  $\phi.(T_0, U_0, V_0, W_0) = (T, U, V, W)$  pour un  $\phi \in \mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$ . De plus, l'action induite sur les traces par  $\phi$  doit être triviale. En particulier,  $\phi$  doit induire une permutation de  $\{1, 2, 3, 4\}$  qui fixe 1. Par quelques arguments topologiques (cf [Bir75]), on peut ainsi voir que l'action de  $\phi$  sur la classe de conjugaison de  $(U_0, V_0, W_0)$  est celle d'une tresse à trois brins  $b \in \mathcal{B}_3$  comme dans [LT08]. Cette orbite est finie puisque la solution de (PVI) que nous avons utilisée est algébrique. A l'aide de Maple, on calcule l'orbite de la classe de conjugaison de  $(U_0, V_0, W_0)$  sous  $\mathcal{B}_3$ . Cette orbite  $\mathcal{O}$  comporte 18 éléments et se décompose de la façon suivante :

$$(14) \quad \mathcal{O} = \sqcup_{i \in I} b_i \mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$$

où  $\mathcal{P}_3$  est le noyau du morphisme naturel  $\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathfrak{S}_3$  et les  $b_i$  ont des images distinctes par ce morphisme. On constate par calcul que l'orbite  $\mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$  est de cardinal 6 et en déduit que  $I$  comporte 3 éléments. De plus,  $\mathcal{P}_3$  agit trivialement sur le triplet  $(trace(U), trace(V), trace(W)) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$  au contraire de  $\sigma_2$  et de  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$  qui induisent respectivement  $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2) \mapsto (\sqrt{3}, 2, \sqrt{3})$  et  $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2) \mapsto (2, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ , la décomposition (14) est donc donnée

par  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = \sigma_1$  et  $b_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ . En particulier,  $(U, V, W)$  est dans l'orbite  $\mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$ .

La monodromie de  $\hat{\mathcal{R}}'_{|E}$  se relève aussi en  $\hat{\rho}$  à  $\mathrm{SL}_2$ . Elle est aisément calculée grâce à la connaissance des exposants :  $\theta_\infty = 0$ ,  $\theta_1 = \frac{1}{12}$ ,  $\theta_2 = \frac{1}{4}$  correspondent respectivement à  $\ell_\infty$ ,  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Soient  $A = \hat{\rho}(\alpha)$  et  $G = \hat{\rho}(\gamma)$ , on a  $\mathrm{trace}(A) = 2 \cos(\pi \theta_\infty)$ ,  $\mathrm{trace}(G) = 2 \cos(\pi \theta_1)$  et  $\mathrm{trace}(AG) = 2 \cos(\pi \theta_2)$ , ce qui détermine une représentation vers  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , unique modulo conjugaison et irréductible, d'après [Chu99]. Après calcul, elle est donnée par  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$  et

$$G = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(5 - 3\sqrt{3}) & \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) \end{bmatrix}.$$

En utilisant la deuxième et la quatrième relation de (13), ainsi que le fait que  $T$  soit parabolique, on voit que  $T$  et  $W$  commutent. Dans l'orbite  $\mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$ , seuls deux triplets satisfont cette condition, même projectivement. En utilisant la troisième et la septième relation de (13), on arrive à voir que l'un d'eux ne peut correspondre à notre représentation tandis qu'un seul représentant de la classe de conjugaison du second satisfait (13), il est donné ci-dessous.

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 1 & 1 \\ -2 + \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} -1 + 2\sqrt{3} & 1 \\ -8 + 3\sqrt{3} & -\sqrt{3} + 1 \end{bmatrix};$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} - 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le groupe  $\langle A, G, U, V, W \rangle$  est un sous-groupe de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\xi])$  où  $\xi = 2 \cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$ . Notons que  $\mathbb{Z}[\xi]$  est l'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}[\xi] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ . On remarque aussi que la représentation  $\rho$  ne se relève pas à  $\mathrm{SL}_2$ .

Exactement la même démarche permet de déterminer la monodromie de la structure transverse du feuilletage dual  $\mathcal{G}$  : vue l'involution, les images de  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont encore dans l'orbite  $\mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$  et une seule trace de monodromie locale change :  $\theta_1 = \frac{7}{12}$ . La représentation obtenue est l'image de la précédente par  $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ .

Un examen plus approfondi donne le résultat suivant.

**Lemme 4.8.3.** — *Le sous-groupe de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  engendré par  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $A$  et  $G$  est une extension de degré 2 de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ , en particulier il est gros.*



*Démonstration.* — En effet,  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$  est engendré par ses deux sous-groupes de matrices triangulaires :  $T_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix}, u \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \right\}$  et  $T_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \right\}$ . L'isomorphisme  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \mapsto u$  permet d'identifier  $T_1$  à  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ , on voit ainsi facilement que  $T_1$  est engendré par les matrices  $A$  et  $W$ . De même, les matrices  $H = G^2 A G^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 12 + 7\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $F = G^2 W G^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 19 + 11\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  engendrent  $T_2$ , puisque  $12 + 7\sqrt{3}$  et  $19 + 11\sqrt{3}$  sont des générateurs du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  en vertu des identités suivantes :

$$1 = -11(12 + 7\sqrt{3}) + 7(19 + 11\sqrt{3}) \text{ et } \sqrt{3} = 19(12 + 7\sqrt{3}) - 12(19 + 11\sqrt{3}).$$

Ainsi le groupe  $\langle A, G, U, V, W \rangle$  contient  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ . D'autre part,  $G$  est le seul générateur non contenu dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$  tandis que  $G^2$  l'est, ce qui montre que  $\langle A, G, U, V, W \rangle / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$  se réduit à deux éléments.  $\square$

#### 4.9. La surface modulaire associée à $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

On déduit de notre travail suffisamment d'informations sur la surface  $Y_{\sqrt{3}}$ .

**Théorème 4.9.1.** — *Un modèle birationnel de la surface modulaire bifeuilletée  $(Y_{\sqrt{3}}, \mathcal{F}_{\sqrt{3}}, \mathcal{G}_{\sqrt{3}})$  est  $(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}_{\omega_1}, \mathcal{G}_{\tau_1})$  où*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 6(3v^2 + 1)v(v^2 + 9uv^2 + 3u)du \\ &+ ((9u - 5)(9u - 2)(9u - 1)v^4 + 9u(5 + 54u^2 - 30u)v^2 + 9u^2(9u - 2))dv. \\ \tau_1 &= 6(3v^2 + 1)v(-8v^2 - 3 + 36uv^2 + 12u)du \\ &+ ((9u - 5)(9u + 1)(9u - 1)v^4 + (3 + 486u^3 - 432u^2 + 45u)v^2 + 9u(9u - 2)(u - 1))dv. \end{aligned}$$

*De plus,  $\sigma_1 : (u, v) \mapsto \left( \frac{3v^2(36v^2 + 13)u - v^2(20v^2 + 9)}{9(12v^2 - 1)(3v^2 + 1)u - 3v^2(36v^2 + 13)}, v \right)$  est une involution birationnelle de  $\mathbb{P}^2$  qui échange  $\mathcal{F}_{\omega_1}$  et  $\mathcal{G}_{\tau_1}$ .*

*Démonstration.* — D'après le calcul de la monodromie des structures transverses de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  et le lemme 4.9.2, on voit que l'on obtient la surface  $(Y_{\sqrt{3}}, \mathcal{F}_{\sqrt{3}}, \mathcal{G}_{\sqrt{3}})$  comme revêtement double de  $(Y_{\Gamma}, \mathcal{F}_{\Gamma}, \mathcal{G}_{\Gamma})$ . Soit  $\pi : Y_{\sqrt{3}} \rightarrow Y_{\Gamma}$  le revêtement en question. Soit  $X$  l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en  $A$ , comme dans la section 4.8.2. La fin de la désingularisation de  $\mathcal{F}$  donne un morphisme  $\phi : \tilde{Y}_{\Gamma} \rightarrow X$  et on note  $\psi : Y_{\Gamma} \dashrightarrow \tilde{Y}_{\Gamma}$  la désingularisation de  $Y_{\Gamma}$ . Soient  $P$  le lieu invariant du feuilletage induit par  $\mathcal{F}$  sur  $X$ ,  $X^1 = X \setminus P$ ,  $Y_{\sqrt{3}}^1 = Y_{\sqrt{3}} \setminus (\pi \circ \psi \circ \phi)^*P$ . La composée  $\pi \circ \psi \circ \phi$  induit un revêtement étale  $\pi^1 : Y_{\sqrt{3}}^1 \rightarrow X^1$  qui est déterminé par sa

représentation de monodromie :  $\pi_1(X^1) \xrightarrow{r} \Gamma/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}]) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . D'après le lemme 4.8.3, on voit que  $p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X, (u, v) \mapsto (u, \frac{-v^2}{3v^2+1})$  induit en restriction à  $X^1$  un revêtement étale qui a exactement  $r$  pour monodromie. Ainsi on a un biholomorphisme  $T$  entre  $Y_{\sqrt{3}}^1$  et  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus r^*P$ , tel que  $p \circ T = \pi^1$ . Comme  $p^{-1} \circ \pi^1$  est une correspondance algébrique, on en déduit que  $T$  se prolonge en une transformation birationnelle, de sorte que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_{\sqrt{3}} & \xrightarrow{\quad T \quad} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \pi^1 & \downarrow p & & \\
 Y_{\Gamma} & \xrightarrow[\psi]{} \tilde{Y}_{\Gamma} & \xrightarrow[\phi]{} & X & 
 \end{array}$$

Ainsi, en pratique, le revêtement double qu'on utilise est  $p$ , ce qui permet de déduire le résultat.  $\square$

Notons que  $Y_{\sqrt{3}}$  est un "revêtement" intermédiaire entre le  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  de la déformation isomonodromique initiale  $\mathcal{R}$  et  $Y_{\Gamma}$  puisque

$$v(s) = \frac{-1/2 i(469045 s+1)(807139 s+1)}{327870750349 s^2+1107137 s+1} \text{ satisfait } \frac{-v(s)^2}{3v(s)^2+1} = \frac{(469045 s+1)^2(807139 s+1)^2}{(4268135377 s^2+599996 s+1)^2} = y(s).$$

**Lemme 4.9.2.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe singulier sur une surface lisse projective  $X$ . Soit  $D$  un diviseur sur  $X$ . Soient  $\Sigma = (P, \mathcal{R}, \sigma)$  une structure transversalement projective pour  $\mathcal{F}$  et  $\Sigma_0 = (P_0, \mathcal{R}_0, \sigma_0)$  une structure transversalement projective pour  $\mathcal{F}|_{X \setminus D}$ .*

*Si la monodromie de  $\mathcal{R}$  n'est pas virtuellement abélienne et  $\mathcal{R}$  n'est pas birationnellement pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe, alors  $(P_0, \mathcal{R}_0, \sigma_0)$  est birationnellement équivalent à  $(P, \mathcal{R}, \sigma)|_{X \setminus D}$ . En particulier  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_0$  ont même monodromie.*

*Démonstration.* — Comme  $X$  est projective, à transformation biméromorphe près,  $\Sigma$  est le fibré trivial sur  $X$  muni d'une équation de Riccati globale  $\mathcal{R} : dz = \alpha + \beta z + \gamma z^2$  et de la section triviale  $z = 0$ . D'autre part, d'après [LP07, Remark 2.3.],  $\Sigma_0$  peut être décrite (biméromorphiquement) par un recouvrement d'ouverts  $(U_i)$  de  $X \setminus D$ , des équations de Riccati  $(\mathcal{R}_i)$  sur les  $U_i$  et des transitions **méromorphes** entre ces feuilletages, qui respectent les sections  $z = 0$ . Par changements de trivialisations méromorphes au dessus des  $U_i$ , on peut supposer  $\mathcal{R}_i : dz = \alpha + \beta z + \gamma_i z^2$  (voir [LP07, eq (2.5) p 228]). Pourvu que  $d\beta \neq 0$ , le résultat [CLNL<sup>+</sup>07, Corollary 2.4] montre  $\gamma_i = \gamma$  et on peut conclure, car tout automorphisme biméromorphe d'une

structure transversalement projective est trivial. C'est bien cette situation que se présente. En effet, si  $d\beta = 0$ , les conditions d'intégrabilité pour  $\mathcal{R}$  montrent  $\alpha = f\gamma$ , pour une fonction méromorphe  $f$ , et sur un revêtement double de  $X$ , par une transformation de jauge méromorphe, on se ramène à  $\alpha = \gamma$ , alors on déduit encore des conditions d'intégrabilité que  $d\alpha = 0$ , ce qui implique que, quitte à passer à un revêtement double,  $\mathcal{F}$  possède une structure transversalement projective à monodromie abélienne, ce qui est exclu grâce au lemme 4.5.6.  $\square$

#### 4.10. Conclusion

Dans une perspective plus générale, on peut se demander quelles solutions (algébriques) de l'équation de Painlevé VI donnent des exemples intéressants de feuilletages et comment le groupe d'Okamoto agit sur cette propriété. L'intérêt qu'on porte à un feuilletage de Riccati sur  $\mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X$  peut provenir de la richesse de son groupe de monodromie (disons sa Zariski densité) et du fait qu'il ne soit pas birationnellement équivalent à un pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe (notamment en vue du résultat susmentionné de Corlette-Simpson). Donnons l'action du groupe d'Okamoto sur les déformations isomonodromiques  $(\mathcal{R}_s)$  associées aux solutions de (PVI).

1. Les transformations qui n'agissent que par changement de signes des paramètres de la solution de (PVI) agissent trivialement sur  $(\mathcal{R}_s)$ .
2. Certaines agissent par des transformations de jauge méromorphes de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C}$  qui sont holomorphes en dehors des pôles  $0, 1, t, \infty$ .
3. Certaines agissent par permutations des pôles :  
 $< [0, 1, t, \infty] \mapsto [0, 1, 1-t, \infty], [0, 1, t, \infty] \mapsto [0, 1, 1/t, \infty] >$ .
4. La symétrie spéciale  $s_\delta$  d'Okamoto a une action non triviale qui ne s'interprète pas géométriquement dans ce contexte.

Soit  $H$  le groupe engendré par les transformations des types 1–3 et  $G$  le groupe d'Okamoto, engendré par les transformations 1–4. Le groupe  $H$  agit par transformations birationnelles, ce qui ne change pas les propriétés géométriques de  $(\mathcal{R}_s)$  et des feuilletages induits par le choix de sections de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C}$ . Par contre, la transformation  $s_\delta$  perturbe ces propriétés : le groupe de monodromie de  $(\mathcal{R}_s)$  est en général modifié par  $s_\delta$  et la propriété de pull-back n'est pas respectée.

On déduit aisément de [Boa06, section 3] que  $H$  est un d'indice 3 dans  $G$  ; chaque solution de la liste de [LT08] donne trois solutions modulo  $H$  et donc

au plus trois feuilletages de Riccati (modulo transformations birationnelles). D'autre part, le choix de la section de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathcal{C}$  est déterminant pour les propriétés numériques du feuilletage  $\mathcal{F}$  induit par  $\mathcal{R}$ .



## CHAPITRE 5

### AUTRES EXEMPLES

#### 5.1. Question de factorisation pour les courbes de petit degré

On peut souhaiter comprendre ce que donne l'alternative de Corlette-Simpson pour les représentations de groupes fondamentaux de complémentaires  $X = \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}$  de courbes de petit degré. Cela revient à trouver les représentations qui ne se factorisent pas projectivement par une courbe. Pour les courbes de degré inférieur à 5, l'application du théorème 1.10.11 permet d'écarter un nombre substantiel de courbes  $\mathcal{C}$ . Toute courbe  $\mathcal{C}$  de degré  $\leq 4$  telle que  $\pi_1(X)$  possède une représentation  $\rho$  Zariski dense vers  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  doit avoir au moins un point singulier puisque  $\pi_1(X)$  ne peut être abélien. La présence de ce point singulier (de multiplicité au moins 2) et la Zariski densité permettent d'appliquer le théorème 1.10.11 et montrent que  $\rho$  se factorise projectivement par une courbe.

Pour les courbes de degré 5, on peut utiliser le travail de Degtyarev [Deg99] qui donne toutes les quintiques dont le complémentaire dans  $\mathbb{P}^2$  a un groupe fondamental non abélien. Nombre d'entre elles possèdent un point triple, ce qui permet d'appliquer l'argument précédent et exclut que ces courbes donnent lieu à des représentations Zariski denses qui ne se factorisent pas projectivement par une courbe.

On ne donne pas ici la liste qui donne la petite vingtaine de types de quintiques qui ne possèdent pas de point triple ; il s'agit simplement de lire la liste de [Deg99].

Pour ces dernières, on peut utiliser la présence d'un point double garantie par la non abélianité du groupe fondamentale. Supposons donnée, pour une telle courbe  $\mathcal{C}$ , une représentation  $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  d'image Zariski dense. Soit  $\mathcal{R}$  le feuilletage de Riccati obtenu par projectivisation d'une

connexion plate qui réalise de la représentation  $\rho$ . La déformation isomonodromique obtenue en restreignant  $\mathcal{R}$  aux éléments du pinceau de droites issu d'un point double donne une solution algébrique  $(q_0(s), t_0(s))$  de l'équation de Painlevé VI (voir chapitre 2). Au cas par cas, en comparant la fonction algébrique  $t_0(s)$  qui donne le birapport des quatre points d'intersections entre  $\mathcal{C}$  et les éléments du pinceau de droite avec les  $t(s)$  qui apparaissent dans notre liste de solutions algébriques, on doit pouvoir obtenir des informations sur  $q_0$ ,  $\rho$  et  $\mathcal{R}$ . Connaissant  $(q_0, t_0)$ , comme on a décidé lesquelles des solutions algébriques de Painlevé VI sont obtenues par pull-back de feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe, on devrait être en mesure de décider si le feuilletage de Riccati  $\mathcal{R}$  initial est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe. Malheureusement, faute de temps, cette étude exhaustive ne sera pas faite dans cette thèse.

## 5.2. Une quintique irréductible à représentations irréductibles

On s'intéresse ici aux feuilletages de Riccati au dessus de  $\mathbb{P}^2$  dont le lieu polaire est donné par la quintique irréductible suivante :

$$Q : 9y^3x^2 - 39y - 16y^2 - 72 - 144x + 96yx^2 - 16y^2x^3 - 30y^2x + 24y^2x^2 - 48yx = 0.$$

C'est une quintique 4-cuspidale : une cuspidale de type  $A_6$  et trois cuspidales de type  $A_3$  (cf notations d'Arnol'd pour les singularités simples). D'après Degtyarev [Deg89] et [Deg99], à isotopie rigide près, il n'y a que deux quintiques irréductibles  $C$  telles que  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$  ne soit pas abélien. La quintique  $Q$  représente une de ces classes d'isotopie et [Deg99] donne les présentations suivantes de  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$  ;

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus Q) = \langle u, v | u = v^2u^2v^2, v^2 = uv^5u \rangle = \langle u, v | u^3 = v^7 = (uv^{-2})^2 \rangle.$$

Comme la quintique est irréductible et de degré premier,  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus Q)$  ne peut avoir de représentation affine non abélienne, d'après [CL98]. On va calculer ses représentations irréductibles vers  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Comme  $Q$  est irréductible de degré impair toute représentation vers  $\mathrm{PSL}_2$  se relève à  $\mathrm{SL}_2$ . Soit  $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus Q) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . On utilise la première présentation. On pose  $U = \rho(u), V = \rho(v)$ .

Quitte à conjuguer, on a  $U = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$  et  $V = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ p & \beta^{-1} \end{bmatrix}$ . Chaque relation de la présentation donne quatre équations polynomiales. On obtient un système de huit équations qu'on résout. Une condition nécessaire et suffisante

pour que  $\rho$  soit une représentation irréductible est la suivante.

$$\begin{cases} \beta^6 - \beta^5 + \beta^4 - \beta^3 + \beta^2 - \beta + 1 = 0, \\ \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \text{ et} \\ p = -\frac{\alpha^2 \beta^{10} + 1}{\alpha \beta (\beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1)(\beta^4 - \beta^3 + \beta^2 - \beta + 1)} \end{cases}$$

Cela détermine l'ordre des images  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  de  $U$  et  $V$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  :  $\mathrm{ord}(\tilde{U}) = 3$  et  $\mathrm{ord}(\tilde{V}) = 7$ , en particulier,  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  définissent une représentation du groupe du triangle  $(2, 3, 7)$  :  $g = \tilde{U}$  et  $h = \tilde{V}^{-2}$  satisfont  $g^3 = h^7 = (gh)^2 = 1$ . On est ainsi conduit à rechercher les feuilletage de Riccati correspondant à chacun des choix de racines de l'unité. On utilise alors le fait que le pinceau  $x = cste$  de droites issues du cusp  $[0 : 1 : 0]$  ne coupe que quatre fois  $Q$ , ce qui signifie que la déformation isomonodromique correspondante est donnée par une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. On veut trouver -pour chaque choix de racines de l'unité- la solution correspondante dans la liste de [LT08]. Vu le calcul de groupe fondamental de [Deg99], on voit que les numérateurs des  $\theta$  d'une solution convenable sont  $(7, 7, 7, 3)$  (modulo permutation), puisqu'ils correspondent aux ordres de l'image de certains lacets par la représentation de monodromie du feuilletage de Riccati recherché. Seules les solutions n°32, 33 et 34 satisfont cette contrainte. Dans [VK08], on donne un revêtement ramifié à un paramètre de  $\mathbb{P}^1$  par lui même, de degré 10 qui permet d'obtenir les déformations isomonodromiques correspondant à ces solutions par pull-back d'une équation de Riccati à trois pôles sur  $\mathbb{P}^1$ . On déduit de ce revêtement l'application  $\phi$  définie par

$$[x : y : 1] \mapsto \frac{1}{16} \frac{y^7 (-9y^3x^2 + 16y^2 - 24y^2x^2 + 16y^2x^3 + 30y^2x - 96yx^2 + 48yx + 39y + 144x + 72)}{(-2y^3x + y^3 + 4y^2x^2 - 8y^2x + 10y^2 - 24yx + 24y + 36)^3}.$$

L'application  $\phi$  est telle qu' une droite  $\delta = \{x = c_0\}$  générique satisfait  $\phi(\delta) \cap Q \subset \{0, \infty\}$  et on obtient les feuilletages de Riccati recherchés en tirant en arrière l' équation hypergéométrique d'exposants

$$(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) = (k/7, 1/2, 1/3)_{k=1,2,3 \bmod 7}$$

par  $\phi$ , puisque  $\phi|_\delta$  a le type de ramification suivant :

$$(1 + 1 + 1 + 7, 2 + 2 + 2 + 2 + 2, 3 + 3 + 3 + 1; 2 + 1 + \dots + 1).$$

La courbe

$$\mathcal{C} : -864 - 864y - 504y^2 - 140y^3 - 21y^4 + 864yx + 576y^2x + 240y^3x + 36y^4x + 3y^5x - 288y^2x^2 - 96y^3x^2 - 24y^4x^2 + 32y^3x^3 = 0$$

est l'image réciproque de 1 par  $\phi$  et elle donne un pôle apparent d'exposant  $\theta_C = 1$  pour nos trois feuilletages de Riccati. La courbe

$$G : -2y^3x + y^3 + 4y^2x^2 - 8y^2x + 10y^2 - 24yx + 24y + 36 = 0$$

est envoyée sur  $\infty$  avec multiplicité 3 par  $\phi$ , elle donne aussi un pôle apparent d'exposant  $\theta_G = 1$ . La courbe  $\{y = 0\}$  est envoyée sur 0 par  $\phi$  avec multiplicité



7, elle donne un pôle apparent d'exposant  $\theta_{\{y=0\}} = k$ . Il n'y pas d'autre pôle apparent, puisque le point générique de la droite à l'infini  $\{[x, y, z] = [x, y, 0]\}$  n'a pas son image par  $\phi$  dans  $\{0, 1, \infty\}$ . Ainsi, pour faire disparaître les pôles apparents on doit faire des transformations élémentaires au dessus de  $G, \mathcal{C}$  et  $\{y = 0\}$ . Les sections  $\{z = \sigma(x, y)\}$  de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  sur lesquelles on doit faire ces transformations élémentaires sont des composantes des pullbacks des singularités au dessus de  $1, \infty$  et  $0$  de l'hypergéométrie utilisée ; elles sont donc de la forme  $z = cste$  et disjointes puisque l'hypergéométrie utilisée a monodromie irréductible. On peut utiliser ce fait pour calculer le fibré obtenu en restriction à la droite générique  $\delta$  de  $\mathbb{P}^2$  : par exemple

- pour  $k > 10$ , on obtient le fibré  $\mathbb{P}((\mathcal{O}_\delta \oplus \mathcal{O}_\delta(10 - k))$  ;
- pour  $k = 1$ , on obtient le fibré  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_\delta \oplus \mathcal{O}_\delta(1))$ .

### 5.3. Représentations pour les sextiques de Zariski

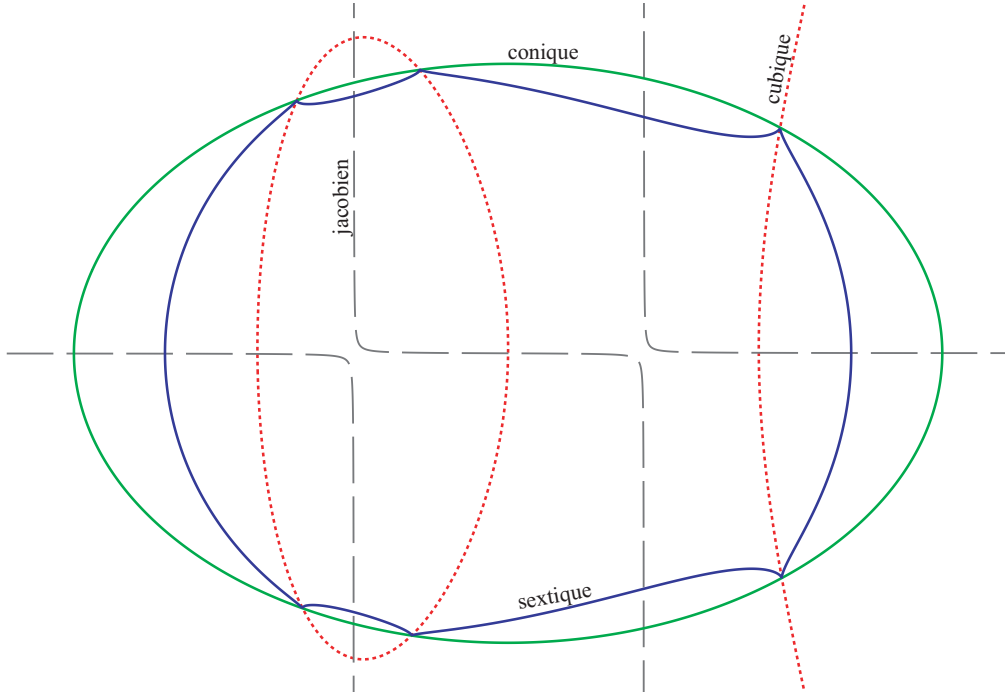
Si on choisit des polynômes à deux variables  $p(u, v)$  et  $q(u, v)$  de degrés respectifs 2 et 3 et génériques, la courbe  $\mathcal{C} : p^3 + q^2 = 0$  est une sextique irréductible qui possède un cusp en chaque point d'intersection entre la conique  $p = 0$  et la cubique  $q = 0$ . Ceci peut se voir en considérant le revêtement ramifié

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (x, y) = (-p(u, v), q(u, v)) \end{aligned}$$

qui envoie la sextique sur le cusp  $y^2 - x^3 = 0$ . En effet, pour  $(p, q)$  générique, le lieu de ramification (donné par le jacobien de  $(-p, q)$ ) ne contient aucun des points d'intersections de  $\{p = 0\}$  et  $\{q = 0\}$  comme le montre l'exemple donné dans la figure 1.

Le groupe fondamental  $G$  d'une telle sextique a été calculé par Zariski dans [Zar29] :  $G$  a la présentation suivante  $\langle g_1, g_2 | (g_1 g_2 g_1)^2 = (g_1 g_2)^3 = 1 \rangle$ , où  $g_1$  et  $g_2$  représentent des lacets simples faisant le tour de  $\mathcal{C}$ . En posant  $u = g_1 g_2 g_1$  et  $v = g_1 g_2$  on obtient  $G \simeq \langle u, v | u^2 = v^3 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Les représentations de  $G$  vers  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  sont donc données par le choix d'un élément  $U$  d'ordre 1 ou 2 (image de  $u$ ) et d'un élément  $V$  d'ordre 1 ou 3 (image de  $v$ ). Si la représentation n'est pas abélienne, après une bonne conjugaison, on peut supposer  $U = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$  et  $V = \begin{bmatrix} j & 0 \\ q & j^2 \end{bmatrix}$  où  $i$  et  $j$  sont d'ordres respectifs 4 et 3 et  $q \in \mathbb{C}$  est un paramètre. La trace de l'image de  $g_2$  par la représentation ainsi déterminée est  $2ij + q + i$ . On voit ainsi qu'en fixant correctement  $q$  on peut obtenir une représentation quasi unipotente à

FIGURE 1. Sextique, cubique, conique et jacobien



l'infini, avec un ordre à l'infini arbitraire. De plus si  $q \neq 0, -4ij - 2i$ , ce qui revient à  $\text{ordre}(g_2) \neq 6$ , la représentation est irréductible. On note que ces représentations ne se relèvent pas à  $\text{SL}_2$ , puisque la matrice  $U$  ne peut être d'ordre 2 que projectivement.

Après conjugaison, en identifiant  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  à l'ensemble des automorphismes de la sphère de Riemann, le cas  $\text{ordre}(g_2) = 6$  peut être décrit de façon plus agréable par  $g_1 \mapsto (z \mapsto \xi z)$  et  $g_2 \mapsto (z \mapsto \xi z + 1)$ , avec  $\xi$  une racine primitive sixième de l'unité. Nous allons réaliser ces représentations comme représentations de monodromie pour des feuilletages de Riccati.

Pour ce faire, on utilise deux feuilletages transversalement affines sur  $\mathbb{C}^2$ . Ce sont deux des modèles donnés dans [Lor00, p 6] pour les feuilletages au voisinage de l'origine qui ont le cusp  $y^2 - x^3 = 0$  comme unique séparatrice et dont l'holonomie est résoluble non abélienne. La famille de modèles est donnée par

$$\omega_{0,k} = df + x^{\frac{k+1}{2}} (2xdy - 3ydx),$$

pour  $k \in \mathbb{N}, k \wedge 6 = 1$  avec  $f = y^2 - x^3$ . Les structures transverses sont données par les feuilletages de Riccati  $\mathcal{R}_k$  définis par

$$\Omega_k = -dz + \omega_{0,k} + \omega_{1,k}z$$

où  $\omega_{1,k} = (\frac{k}{6} + 1) \frac{df}{f}$ .

Pour avoir l'exposant le plus simple possible ( $\pm 1/6$ ), pour chacun de ces feuilletages, on fait des transformations élémentaires centrées sur les singularités du feuilletage  $\mathcal{R}_k$  qui sont en dehors de la section invariante  $z = \infty$ . Pour  $k = 5$ , on fait deux fois de suite ce type de transformation. Pour  $k = 1$ , on ne le fait qu'une fois. On obtient les feuilletages suivants sur le fibré trivial au dessus de  $\mathbb{C}^2$ .

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 : dz = \frac{1}{2} \frac{x(xz + 6x + 6y)dx}{-y^2 + x^3} + \frac{1}{3} \frac{(-yz - 6y - 6x^2)dy}{-y^2 + x^3}.$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_5 : dz = \frac{1}{10} \frac{(-12y - 5x^2z)dx}{-y^2 + x^3} + \frac{1}{15} \frac{(12x + 5yz)dy}{-y^2 + x^3}.$$

On tire en arrière  $\tilde{\mathcal{R}}_1$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_5$  par le revêtement  $\Phi$  et obtient deux feuilletages de Riccati sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . La seule composante de pôles pour ces feuilletages est la sextique  $\mathcal{C}$ , puisque c'est l'image réciproque du cusp par  $\Phi$ . On voit alors, comme  $\Phi$  est étale au point générique de  $\mathcal{C}$ , que les représentations de monodromie (vers le groupe affine de  $\mathbb{C}$ ) de ces deux feuilletages ont des parties linéaires d'ordre 6 différentes puisque 5 et 1 ne sont pas égaux modulo 6. Bien sûr les feuilletages obtenus se prolongent de façon naturelle sur le fibré trivial au dessus de  $\mathbb{P}^2$ . On obtient ainsi deux feuilletages de Riccati  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_5$  sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  pour lesquels la section  $z = \infty$  est invariante. Utilisons les coordonnées homogènes  $[U : V : W]$  satisfaisant  $[u : v : 1] = [U : V : 1]$  pour prolonger les coordonnées sur  $\mathbb{C}^2$ .

Par le calcul formel, on peut calculer les feuilletages  $(\mathcal{F}_k)_{k=1,5}$ , avec  $P$  et  $Q$  génériques (i.e. à paramètres), on voit qu'ils ont tous deux un pôle simple apparent en  $W = 0$ .

Pour  $k = 1$ , on voit que ce pôle disparaît après une transformation élémentaire centrée en  $W = 0, z = \infty$ . Pour  $k = 5$ , ce pôle disparaît après une transformation élémentaire centrée en  $W = 0, z = 0$ . On obtient ainsi deux feuilletages de Riccati  $(\tilde{\mathcal{F}}_k)_{k=1,5}$  sur  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$  dont le lieu polaire est la sextique de Zariski.

De plus, pour ces deux feuilletages, on peut exclure l'existence d'une deuxième section invariante en calculant quelle peut être l'autointersection de sa restriction à une droite générique grâce à la formule de Camacho-Sad et en injectant l'expression d'une telle section dans l'équation différentielle qui donne le feuilletage (toujours en restriction à une droite).

Les représentations de monodromie de  $(\tilde{\mathcal{F}}_k)_{k=1,5}$  sont donc affines non abéliennes avec des parties linéaires différentes : ce sont les représentations qu'on souhaitait réaliser.

On peut se demander si les feuilletages de Riccati initiaux  $(\mathcal{R}_k)_{k=1,5}$  de Frank Loray sont obtenus par pull-back de feuilletages de Riccati au dessus d'une courbe. Une analyse spécifique est requise pour trancher cette question puisque l'on ne peut appliquer le théorème 1.10.11 vu que les monodromies de ces feuilletages sont affines de partie linéaire finie et sont en particulier virtuellement abéliennes.



## BIBLIOGRAPHIE

- [AK02] F. V. ANDREEV & A. V. KITAEV – « Transformations  $RS_4^2(3)$  of the ranks  $\leq 4$  and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation », *Comm. Math. Phys.* **228** (2002), no. 1, p. 151–176.
- [Art98] E. ARTIN – *Galois theory*, second éd., Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1998, Edited and with a supplemental chapter by Arthur N. Milgram.
- [Bak84] A. BAKER – *A concise introduction to the theory of numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [Bir75] J. S. BIRMAN – *Braids, links, and mapping class groups*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1975, Based on lecture notes by James Cannon.
- [Boa05] P. BOALCH – « From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo », *Proc. London Math. Soc. (3)* **90** (2005), no. 1, p. 167–208.
- [Boa06] ———, « The fifty-two icosahedral solutions to Painlevé VI », *J. Reine Angew. Math.* **596** (2006), p. 183–214.
- [Boa07] ———, « Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem », in *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 9, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, p. 85–112.
- [Boa10] ———, « Towards a non-linear Schwarz’s list », in *The many facets of geometry*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010, p. 210–236.

- [Bru00] M. BRUNELLA – *Birational geometry of foliations*, Monografias de Matemática. [Mathematical Monographs], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2000, disponible en ligne à <http://www.impa.br/Publicacoes/Monografias/Abstracts/brunella.ps>.
- [Bru03a] ———, « Foliations on complex projective surfaces », in *Dynamical systems. Part II*, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, 2003, p. 49–77.
- [Bru03b] ———, « Subharmonic variation of the leafwise Poincaré metric », *Invent. Math.* **152** (2003), no. 1, p. 119–148.
- [Chu99] R. C. CHURCHILL – « Two generator subgroups of  $SL(2, \mathbf{C})$  and the hypergeometric, Riemann, and Lamé equations », *J. Symbolic Comput.* **28** (1999), no. 4-5, p. 521–545, Differential algebra and differential equations.
- [CL98] D. CERVEAU & F. LORAY – « Un théorème de Frobenius singulier via l'arithmétique élémentaire », *J. Number Theory* **68** (1998), no. 2, p. 217–228.
- [CL09] S. CANTAT & F. LORAY – « Dynamics on character varieties and Malgrange irreducibility of Painlevé VI equation », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), no. 7, p. 2927–2978.
- [CLN85] C. CAMACHO & A. LINS NETO – *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985, Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman.
- [CLNL<sup>+</sup>07] D. CERVEAU, A. LINS-NETO, F. LORAY, J. V. PEREIRA & F. TOUZET – « Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences », *Mosc. Math. J.* **7** (2007), no. 1, p. 21–54, 166.
- [Cou12] G. COUSIN – « Un exemple de feuilletage modulaire déduit d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI », [http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00659358/PDF/Tetra6Hilbert modulaire.pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00659358/PDF/Tetra6Hilbert%20modulaire.pdf) (2012).
- [CS08] K. CORLETTE & C. SIMPSON – « On the classification of rank-two representations of quasiprojective fundamental groups », *Compos. Math.* **144** (2008), no. 5, p. 1271–1331.

- [Cul86] M. CULLER – « Lifting representations to covering groups », *Adv. in Math.* **59** (1986), no. 1, p. 64–70.
- [Deg89] A. I. DEGTYARËV – « Isotopic classification of complex plane projective curves of degree 5 », *Algebra i Analiz* **1** (1989), no. 4, p. 78–101.
- [Deg99] A. I. DEGTYAREV – « Quintics in  $\mathbf{CP}^2$  with nonabelian fundamental group », *Algebra i Analiz* **11** (1999), no. 5, p. 130–151.
- [Del70] P. DELIGNE – *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Del81] ———, « Le groupe fondamental du complément d’une courbe plane n’ayant que des points doubles ordinaires est abélien (d’après W. Fulton) », in *Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80*, Lecture Notes in Math., vol. 842, Springer, Berlin, 1981, p. 1–10.
- [Dia12] K. DIARRA – « Construction et classification de certaines solutions algébriques des systèmes de Garnier », *arXiv :1201.1499* (2012).
- [DM00] B. DUBROVIN & M. MAZZOCCO – « Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups », *Invent. Math.* **141** (2000), no. 1, p. 55–147.
- [Dor01] C. F. DORAN – « Algebraic and geometric isomonodromic deformations », *J. Differential Geom.* **59** (2001), no. 1, p. 33–85.
- [Ele82] G. ELENCAWJG – « The Brauer groups in complex geometry », in *Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981)*, Lecture Notes in Math., vol. 917, Springer, Berlin, 1982, p. 222–230.
- [FG65] W. FISCHER & H. GRAUERT – « Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten », *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1965** (1965), p. 89–94.
- [GH78] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics.
- [Heu09] V. HEU – « Stability of rank 2 vector bundles along isomonodromic deformations », *Math. Ann.* **344** (2009), no. 2, p. 463–490.



- [Hir53] F. HIRZEBRUCH – « Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen », *Math. Ann.* **126** (1953), p. 1–22.
- [Hir73] F. E. P. HIRZEBRUCH – « Hilbert modular surfaces », *Enseignement Math. (2)* **19** (1973), p. 183–281.
- [IIS04] M.-A. INABA, K. IWASAKI & M.-H. SAITO – « Bäcklund transformations of the sixth Painlevé equation in terms of Riemann-Hilbert correspondence », *Int. Math. Res. Not.* (2004), no. 1, p. 1–30.
- [Kas81] M. KASHIWARA – « Quasi-unipotent constructible sheaves », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **28** (1981), no. 3, p. 757–773 (1982).
- [Kov86] J. J. KOVACIC – « An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations », *J. Symbolic Comput.* **2** (1986), no. 1, p. 3–43.
- [Law77] H. B. LAWSON, JR. – *The quantitative theory of foliations*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1977, Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Washington University, St. Louis, Mo., January 6–10, 1975, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 27.
- [LMP09] F. LORAY & D. MARÍN PÉREZ – « Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces », *Astérisque* (2009), no. 323, p. 223–252.
- [LN87] A. LINS NETO – « Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two », *J. Differential Geom.* **26** (1987), no. 1, p. 1–31.
- [Lor00] F. LORAY – *Sur la structure transverse d’une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans le domaine complexe*, HDR, Université de Lille, 2000.
- [LP07] F. LORAY & J. V. PEREIRA – « Transversely projective foliations on surfaces : existence of minimal form and prescription of monodromy », *Internat. J. Math.* **18** (2007), no. 6, p. 723–747.

- [LSS10] F. LORAY, M.-H. SAITO & C. SIMPSON – « Foliations on the moduli space of rank two connections on the projective line minus four points », *arXiv :1012.3612v2* (2010).
- [LT08] O. LISOVYY & Y. TYKHYY – « Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation », *arXiv :0809.4873v2* (2008).
- [MP05] L. G. MENDES & J. V. PEREIRA – « Hilbert modular foliations on the projective plane », *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), no. 2, p. 243–291.
- [MR03] C. MACLACHLAN & A. W. REID – *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 219, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [NY02] D. NOVIKOV & S. YAKOVENKO – « Lectures on meromorphic flat connexions », *disponible en ligne* (2002).
- [OSS80] C. OKONEK, M. SCHNEIDER & H. SPINDLER – *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics, vol. 3, Birkhäuser Boston, Mass., 1980.
- [Rie74] O. RIEMENSCHNEIDER – « Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen) », *Math. Ann.* **209** (1974), p. 211–248.
- [Scá97] B. A. SCÁRDUA – « Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **30** (1997), no. 2, p. 169–204.
- [Sha97] R. W. SHARPE – *Differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 166, Springer-Verlag, New York, 1997, Cartan’s generalization of Klein’s Erlangen program, With a foreword by S. S. Chern.
- [Shi] I. SHIMADA – « Lectures on Zariski-Van Kampen theorem », *Notes de Cours, disponibles en ligne*.
- [Tou03] F. TOUZET – « Sur les feuilletages holomorphes transversalement projectifs », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), no. 3, p. 815–846.
- [vdG88] G. VAN DER GEER – *Hilbert modular surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 16, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

- [VK08] R. VIDUNAS & A. KITAEV – « computation of RS-pullback transformations for algebraic Painlevé VI solutions », <http://arxiv.org/abs/0705.2963v3> (2008).
- [Zar29] O. ZARISKI – « On the Problem of Existence of Algebraic Functions of Two Variables Possessing a Given Branch Curve », *Amer. J. Math.* **51** (1929), no. 2, p. 305–328.





## Résumé

Dans cette thèse on étudie les propriétés des connexions plates logarithmiques de rang 2 et leurs projectifiés qui sont des feuilletages de Riccati, principalement sur le plan projectif. L'invariant principal d'un tel objet est sa représentation de monodromie, qui est une représentation vers  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  ou  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  du groupe fondamental du complémentaire de son lieu polaire. Dans un premier temps, on étudie la propriété, pour un feuilletage de Riccati sur  $\mathbb{P}^2$ , d'être obtenu en tirant un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe. Ensuite on s'intéresse aux feuilletages de Riccati qui ne sont pas construits de cette manière et qui peuvent être obtenus à partir d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. Nous les classons par orbites sous le groupe de Galois de  $\bar{\mathbb{Q}}$  sur  $\mathbb{Q}$ . Finalement, on s'intéresse aux feuilletages transversalement projectifs : ces feuilletages s'obtiennent par restriction de feuilletages de Riccati à des sections de leurs  $\mathbb{P}^1$ -fibrés sous-jacents. On s'intéresse particulièrement aux feuilletages modulaires de Hilbert, dont on décrit assez finement la structure transverse. On conclut notre travail par l'exhibition de modèles birationnels sur  $\mathbb{P}^2$  pour certains feuilletages modulaires de Hilbert.

## Abstract

In this thesis we study the properties of flat rank 2 logarithmic connections and their projectivized version which are Riccati foliations, mainly on the projective plane. The main invariant of such an object is its monodromy representation, which is a representation to  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  or  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  of the fundamental group of the complement of its polar locus. First, we investigate the property for Riccati foliations to be obtained as pull-backs of Riccati foliations over curves. Then, we study the Riccati foliations that cannot be obtained in this way but can be constructed from an algebraic solution of Painlevé VI equation. We classify them with respect to an action of the Galois group of  $\bar{\mathbb{Q}}$  over  $\mathbb{Q}$ . Finally, we study transversely projective foliations: these foliations are obtained by restricting Riccati foliations to sections of their underlying  $\mathbb{P}^1$ -bundle. We have a particular interest in Hilbert modular foliations, the transverse structure of which we give a quite complete description. As a conclusion, we exhibit birational models on  $\mathbb{P}^2$  for some Hilbert modular foliations.